

نمایش سیستم های چند متغیره

علی خاکی صدیق

گروه کنترل - مهر ۱۳۹۹

● مقدمه

- طراحی سیستم های کنترل: سیستم های کنترل مبتنی بر مدل ریاضی
- مدل سیستم: مدل تحلیلی ریاضی
- مدل های به دست آمده از شناسایی سیستم
- مدل های محاسبات نرم
- مدل ریاضی: روشهای تحلیل و طراحی سیستم های کنترلی

• توصیف سیستم های چندمتغیره:

- مدل فضای حالت

- مدل تابع تبدیل

- مدل ماتریس سیستم یا

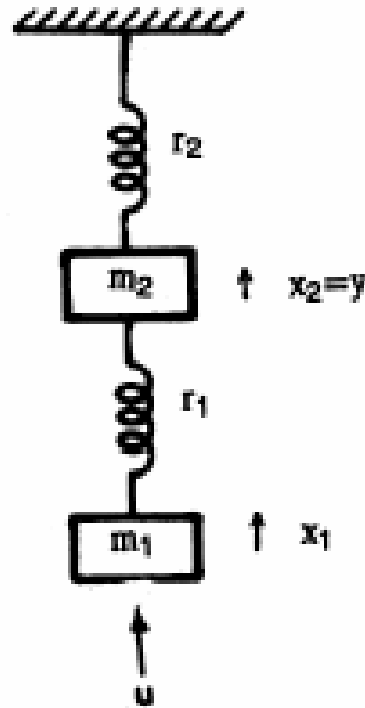
Polynomial Matrix Description (PMD)

- مدل کسر ماتریسی یا

Matrix Fraction Description (MFD)

توصیف ماتریس سیستم

یک مثال: سیستم جرم و فنر



معادلات دیفرانسیل و جبری سیستم:

$$m_1 \ddot{x}_1 = u - r_1(x_1 - x_2)$$

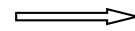
$$m_2 \ddot{x}_2 = r_1(x_1 - x_2) - r_2 x_2$$

$$y = x_2$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + r_1(x_1 - x_2) = u$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - r_1(x_1 - x_2) + r_2 x_2 = 0$$

$$y = x_2$$



$$\implies \begin{bmatrix} m_1 \frac{d^2}{dt^2} + r_1 & -r_1 \\ -r_1 & m_2 \frac{d^2}{dt^2} + r_2 + r_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0u$$

$$P \left(\frac{d}{dt} \right)$$

$$R \left(\frac{d}{dt} \right)$$

$$W \left(\frac{d}{dt} \right)$$

$$\xi(t)$$

$$Q \left(\frac{d}{dt} \right)$$

و در حالت کلی:

بردار n بعدی متغیرهای سیستم

$$P \left(\frac{d}{dt} \right) \xi(t) = Q \left(\frac{d}{dt} \right) u(t)$$

بردار m بعدی متغیرهای ورودی

$$y(t) = R \left(\frac{d}{dt} \right) \xi(t) + W \left(\frac{d}{dt} \right) u(t)$$

بردار a بعدی متغیرهای خروجی

تبدیل لاپلاس با شرایط اولیه صفر می دهد:

$$P(s)\xi(s) = Q(s)U(s)$$

$$Y(s) = R(s)\xi(s) + W(s)U(s)$$

باز نویسی می دهد:

$$\begin{bmatrix} P(s) & Q(s) \\ -R(s) & W(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(s) \\ -U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Y(s) \end{bmatrix}$$



ماتریس سیستم روزنبراک Rosenbrock System Matrix

چند نکته:

- تابع تبدیل از ماتریس سیستم
- مرتبه سیستم (System Order) از ماتریس سیستم
- ماتریس سیستم و فضای حالت

$$\begin{bmatrix} P(s) & Q(s) \\ -R(s) & W(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(s) \\ -U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Y(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(s) \\ -U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Y(s) \end{bmatrix}$$

- سیستم های سره و اکیدا سره

• توصیف کسر ماتریسی

ماتریس تابع تبدیل ماتریسی است از توابع گویا که می تواند به صورت حاصل ضرب دو ماتریس از توابع چند جمله ای نوشته شود که **توصیف کسر ماتریسی** نامیده می شود.

$$G(s) = [g_{ij}(s)] = \begin{bmatrix} b_{ij}(s) \\ a_{ij}(s) \end{bmatrix} \Rightarrow G(s) = N_R(s)D_R^{-1}(s) = D_L^{-1}(s)N_L(s)$$

یک مثال ساده:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^3+5s-1} = (s+1)(s^3+5s-1)^{-1} = (s^3+5s-1)^{-1}(s+1)$$

یک مثال ساده دیگر:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} \begin{bmatrix} (s+2)(s+1) & (s+1) \\ (s+2) & (s+1)^2 \end{bmatrix}$$

⇒

$$G(s) = \begin{bmatrix} (s+1)^2(s+2) & 0 \\ 0 & (s+1)^2(s+2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (s+2)(s+1) & (s+1) \\ (s+2) & (s+1)^2 \end{bmatrix} \quad \text{(Left MFD)}$$

$$= \begin{bmatrix} (s+2)(s+1) & (s+1) \\ (s+2) & (s+1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+1)^2(s+2) & 0 \\ 0 & (s+1)^2(s+2) \end{bmatrix}^{-1} \quad \text{(Right MFD)}$$

یک مثال دیگر:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \begin{bmatrix} s^2 & 2 \\ -2 & s^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s^2 + 2s + 2 & 0 \\ 0 & s^2 + 2s + 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s^2 & 2 \\ -2 & s^2 \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} s^2 & 2 \\ -2 & s^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s^2 & 2 \\ -2 & s^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ -1 & s-1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

نکته کلیدی: MFD ها یکتا نیستند.

$$\bar{D}_L(s) = W^{-1}(s)D_L(s), \quad \bar{N}_L(s) = W^{-1}(s)N_L(s)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \bar{G}(s) &= \bar{D}_L^{-1}(s)\bar{N}_L(s) \\ &= D_L^{-1}(s)W(s)W^{-1}(s)N_L(s) \\ &= D_L^{-1}(s)N_L(s) \\ &= G(s) \end{aligned}$$

■ خواص MFD های چپ و راست مشابه است.

مرتبۀ MFD ها :

$$G(s) = D_L^{-1}(s)N_L(s)$$

$$\Rightarrow \deg \det D_L(s) = \deg D_L(s) = \text{MFD Order}$$

■ مقسوم علیه مشترک چپ و راست ماتریس های چند جمله ای:

$$D_L(s) = W(s)\bar{D}_L(s), \quad N_L(s) = W(s)\bar{N}_L(s)$$

$$D_R(s) = \bar{D}_R(s)W(s), \quad N_R(s) = \bar{N}_R(s)W(s)$$

■ ماتریس تک مدولی

■ ماتریس های چند جمله ای نسبت به هم اول از طرف چپ و راست.

MFD های نسبت به هم اول یا می نیمال:

$$G(s) = D_L^{-1}(s)N_L(s)$$

A Minimal MFD Representation $\Leftrightarrow N_L, D_L$ are Relatively Prime

■ دو خاصیت بزرگترین مقسوم علیه مشترک چپ ماتریس های چند جمله ای:

1. $D_L(s) = W(s)\bar{D}_L(s), \quad N_L(s) = W(s)\bar{N}_L(s)$

2. $\forall W_1(s)$ – Another Left Divisor, $\exists R(s)$, s.t. $W(s) = W_1(s)R(s)$

■ یک روش تعیین بزرگترین مقسوم علیه مشترک با استفاده از ماتریس های مقدماتی

• یک مثال

$$\bar{N}_L(s) = \begin{bmatrix} s & s^2 + s \\ s + 2 & s + 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{D}_L(s) = \begin{bmatrix} -s & s^2 + s \\ s - 2 & s + 2 \end{bmatrix}$$

فاکتور چپ مشترک

$$\bar{N}_L(s) = \begin{bmatrix} 0 & s \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + 1 & 1 \\ 1 & s + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & s^2 + s \\ s + 2 & s + 2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{D}_L(s) = \begin{bmatrix} 0 & s \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s - 1 & 1 \\ -1 & s + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s & s^2 + s \\ s - 2 & s + 2 \end{bmatrix}$$

آیا نمایش جدید می نیمال است؟

$$N_L(s) = \begin{bmatrix} s + 1 & 1 \\ 1 & s + 1 \end{bmatrix}, \quad D_L(s) = \begin{bmatrix} s - 1 & 1 \\ -1 & s + 1 \end{bmatrix}$$

توجه کنید که

$$N_L(s) = \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix},$$

$$D_L(s) = \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}$$

نمایش جدید می نیمال است

$$\hat{N}_L(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}, \hat{D}_L(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}$$

استفاده از الگوریتم پیدا کردن بزرگترین فاکتور مشترک:

Form, $\begin{bmatrix} s & s^2 + s & -s & s^2 + s \\ s + 2 & s + 2 & s - 2 & s + 2 \end{bmatrix}$ and perform the following operations:

$$C2-C4 \Rightarrow \begin{bmatrix} s & s^2 + s & -s & 0 \\ s + 2 & s + 2 & s - 2 & 0 \end{bmatrix}, C1+C3 \Rightarrow \begin{bmatrix} s & s^2 + s & 0 & 0 \\ s + 2 & s + 2 & 2s & 0 \end{bmatrix}$$

$$-(s+1)C1+C2 \Rightarrow \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ s + 2 & -s(s+2) & 2s & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(s+2)C3+C2 \Rightarrow \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ s + 2 & 0 & 2s & 0 \end{bmatrix}, C3 \leftrightarrow C2 \Rightarrow \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ s + 2 & 2s & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hence, $W(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ s + 2 & 2s \end{bmatrix}$, and

$$\bar{N}_L(s) = \begin{bmatrix} s & s^2 + s \\ s + 2 & s + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ s + 2 & 2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s + 1 \\ 0 & -\frac{1}{2}s - 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{D}_L(s) = \begin{bmatrix} -s & s^2 + s \\ s - 2 & s + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ s + 2 & 2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & s + 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}s - 1 \end{bmatrix}$$