قطب ها و صفرها سیستم های چند متغیره

علی خاکی صدیق

گروه کنترل- مهر ۱۳۹۹

- **مقدمه**

  - سیستم های اسکالر و قطری

$$g(s)=\frac{b(s)}{a(s)},G(s)=\begin{bmatrix}\frac{b(s)}{a(s)} & 0\\ 0 & \frac{c(s)}{d(s)}\end{bmatrix}$$

چند جمله ای صفر

چند جمله ای قطب

  - اهمیت تعریف قطب و صفر در سیستم ها

- **قطب ها در سیستم های چند متغیره**

نمایش فضای حالت سیستم چند متغیره

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$u(t) = 0, x(0) = x_0 \Rightarrow x(t) = x_0 e^{st} \Rightarrow s x_0 e^{st} = A x_0 e^{st}$$
$$\Rightarrow (sI - A)x_0 = 0$$

$$x(0) = x_0 \neq 0 \Rightarrow |sI - A| = 0$$

این همان معادله مشخصه سیستم است و ریشه های آن قطب های سیستم هستند.

نمایش ماتریس سیستم روزنبراک سیستم چند متغیره

$$\mathrm{P}(s)=\begin{bmatrix} P(s) & Q(s) \\ -R(s) & W(s) \end{bmatrix}$$

$$\text{System Poles}: \left|P(s)\right|=0$$

نمایش کسر ماتریسی سیستم چند متغیره

$$G(s)=D_L^{-1}(s)N_L(s)$$

$$\text{System Poles}: \left|D_L(s)\right|=0$$

- اکیداً معادل بدون سیستمی در نمایش ماتریس سیستم روزنبراک

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X(s) & I_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(s) & Q(s) \\ -R(s) & W(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & Y(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1(s) & Q_1(s) \\ -R_1(s) & W_1(s) \end{bmatrix}$$

- یک مرتبه دارند
- ماتریس تابع تبدیل یکسان دارند

- عملیات مجاز تحت اکیداً معادل بدون سیستمی
- تبدیل به صورت فضای حالت
- مثال ۳-۲ و ۳-۳

- تعیین قطب های سیستم چند متغیره از نمایش تابع تبدیل چندان ساده نیست. دو روش پیشنهادی:

روش قاعده چندجمله ای قطب

روش نمایش اسمیث مک میلان

روش قاعده چندجمله ای قطب:

چندجمله ای قطب ماتریس تابع تبدیل سیستم، کوچکترین مخرج مشترک کلیه کهادهای غیر صفر ماتریس تابع تبدیل از تمام مرتبه ها است.

• یک مثال

ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+3}\\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

کهادهای مرتبه 1 $G(s)$ همان عناصر آن می‌باشند و عبارتند از

$$\frac{1}{s+1}\ ,\ \frac{2}{s+3}\ ,\ \frac{1}{s+1}\ ,\ \frac{1}{s+1}$$

کهاد مرتبه 2 $G(s)$ نیز دترمینان آن است و عبارتست از

$$\frac{-s+1}{(s+1)^2(s+3)}$$

از اینرو کوچکترین مخرج مشترک کلیه کهادهای غیر صفر 1×1 و 2×2 $G(s)$ عبارتست از

$$p(s)=(s+1)^2(s+3)$$

که همان چند جمله‌ای قطب سیستم است و لذا قطبهای سیستم در 1- ، 1- و 3- می‌باشند.

- **یک مثال**

ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)}\begin{bmatrix}(s-1)(s+2) & 0 & (s-1)^2\\ -(s+1)(s+2) & (s-1)(s+1) & (s-1)(s+1)\end{bmatrix}$$

کهادهای مرتبه 1 $G(s)$ همان عناصر $g_{ij}(s)$ می‌باشند و برای تعیین کهادهای مرتبه 2 $G(s)$ از علامتگذاری زیر استفاده می‌کنیم:

$$G\begin{matrix}i_1,i_2,\ldots,i_r\\ j_1,j_2,\ldots,j_r\end{matrix}$$

که نشان دهنده کهاد مرتبه r می‌باشد. این کهاد با گرفتن دترمینان ماتریس بدست آمده از $G(s)$ با حذف کلیه ردیفها بجز ردیفهای $i_1,i_2,\ldots,i_r$ و کلیه ستونها بجز ستونهای $j_1,j_2,\ldots,j_r$ بدست آمده است. در این حالت داریم

$$G_{1,2}^{1,2}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\ ,\quad G_{1,3}^{1,2}=\frac{2}{(s+1)(s+2)}\ ,\quad G_{2,3}^{1,2}=\frac{-(s-1)}{(s+1)(s+2)^2}$$

و لذا چند جمله‌ای قطب $G(s)$ عبارتست از

$$p(s)=(s+1)(s+2)^2(s-1)$$

و قطبهای سیستم در 1- ، 2- ، 2- و 1+ قرار دارند

- **یک مثال**

ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ s^2+s-4 & 2s^2-s-8 \\ s^2-4 & 2s^2-8 \end{bmatrix}$$

کهادهای مرتبه 2 در این حالت عبارتند از

$$G_{1,2}^{1,2}=\frac{3(s-2)}{(s+1)^2(s+2)} \quad , \quad G_{1,2}^{1,3}=\frac{3(s-2)}{(s+1)^2(s+2)} \quad , \quad G_{1,2}^{2,3}=\frac{3s(s-2)}{(s+1)^2(s+2)}$$

و لذا چند جمله‌ای قطب $G(s)$ عبارتست از

$$p(s)=(s+1)^2(s+2)$$

و قطبهای سیستم در 1-، 1- و 2- قرار دارند.

- **یک مثال**

ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{s-1}{s+1} & \frac{1}{s+1}\\ \frac{-1}{s+1} & \frac{s-2}{s+1}\end{bmatrix}$$

کلیه کهادهای مرتبه 1 و 2 $G(s)$ عبارتند از

$$\frac{s-1}{s+1}\ ,\ \frac{1}{s+1}\ ,\ \frac{-1}{s+1}\ ,\ \frac{s-2}{s+1}\ ,\ \frac{s^2-3s+3}{(s+1)^2}$$

کوچکترین مخرج مشترک این عناصر $(s+1)^2$ است و لذا قطبهای سیستم در 1- و 1- قرار دارند.

- صورت اسمیث مک میلان **(The Smith-McMillan Form)**
  - سه تعریف مقدماتی

ماتریس های چندجمله ای معادل:

$$P(s) = L_l(s)\cdots L_1(s)Q(s)R_1(s)\cdots R_r(s)$$

صفرهای ماتریس های چندجمله ای:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}}_{\text{single zero}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix}}_{\text{double zero}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & s+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{no zero}}$$

رتبه ماتریس های چندجمله ای:

The Normal Rank of $P(s)$ is r if $\operatorname{rank} P(s) = r$ for almost all s.

Theorem Let $P(s)$ be any $l \times m$ polynomial matrix with rank$P(s) = r$, then it is eqiuvalent to the following $l \times m$ matrix

$$S(s) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(s) & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \varepsilon_r(s) & \\ 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Where,

$$\varepsilon_i(s) \big| \varepsilon_{i+1}(s) \qquad i = 1, \cdots, r-1$$

$$\varepsilon_i(s) = \frac{D_i(s)}{D_{i-1}(s)} \quad i = 1, \cdots, r$$

$D_i(s) =$ greatest common divisors of all the $i \times i$ minors of $P(s)$

$S(s)$ is the Smith form of $P(s)$, $\varepsilon_i(s)$ are the invariant factors and $D_i(s)$ are the determinantal divisors of $P(s)$. The zeros of $S(s) \equiv \prod_i \varepsilon_i(s) = 0$

- صورت اسمیث را می توان از انجام عملیات مقدماتی زیر به دست آورد:

- multiply a row/column by a nonzero constant;
- interchange two rows or two columns;
- add row/column multiplied by polynomial to another row/column.

- **نکته:** صورت اسمیث هر ماتریس چندجمله ای یکتا است. لیکن ماتریس های مقدماتی برای رسیدن به آن یکتا نیستند.

- **یک مثال**

$$P(s)=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ s^2+s-4 & 2s^2-s-8 \\ s^2-4 & 2s^2-8 \end{bmatrix}$$

مقسوم علیه های دترمینانی:

$$D_0(s)=1, D_1(s)=\gcd\left\{1,-1,s^2+s-4,2s^2-s-8,2s^2-8,s^2-4\right\},$$

$$D_2(s)=\gcd\left\{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ s^2-4 & 2s^2-8 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ s^2+s-4 & 2s^2-s-8 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} s^2+s-4 & 2s^2-s-8 \\ s^2-4 & 2s^2-8 \end{vmatrix}\right\}$$

$$=(s+2)(s-2)$$

فاکتورهای تغییرناپذیر:

$$\varepsilon_1(s)=1, \varepsilon_2(s)=(s+2)(s-2)$$

و سر انجام:

$$S(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s+2)(s-2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- یک مثال دیگر:

$$N(s) := \begin{bmatrix} s+1 & s-1 \\ s+2 & s-2 \end{bmatrix} \overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} s+1 & s-1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{(2)}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} s+1 & 2s \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 2s \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{(4)}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} =: S(s).$$

Theorem Let $G(s)$ be any $l \times m$ transfer function matrix with rank$G(s) = r$ then it is eqiuvalent to the following $l \times m$ matrix

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} & \\ 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Where,

$$\varepsilon_i(s) \big| \varepsilon_{i+1}(s) \qquad i = 1, \cdots, r-1$$

$$\psi_{i+1}(s) \big| \psi_i(s) \qquad i = 1, \cdots, r-1$$

$$\varepsilon_i(s), \psi_i(s) \quad \text{are relatively prime } \forall i$$

$M(s)$ is the Smith-McMillan form of $G(s)$.

Let $G(s) = L(s)M(s)R(s)$ where, $L(s), R(s)$ are the elementary matrices

Rewrite, $M(s) = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} & \\ 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix}$ as $M(s) = N'(s)D'(s)^{-1}$,

Then,

$$G(s) = L(s)N'(s)D'(s)^{-1}R(s) = [L(s)N'(s)][R^{-1}(s)D'(s)]^{-1}$$

Which is a Right MFD of $G(s)$.

• یک مثال

ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s^2+3s+2} & \frac{-1}{s^2+3s+2}\\ \frac{s^2+s-4}{s^2+3s+2} & \frac{2s^2-s-8}{s^2+3s+2}\\ \frac{s-2}{s+1} & \frac{2s-4}{s+1}\end{bmatrix}$$

داریم

$$G(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}P(s)$$

که در آن $P(s)$ ماتریس چند جمله‌ای داده شده در مثال ۲-۸ است. با استفاده از صورت اسمیث $P(s)$ در مثال ۲-۸، صورت اسمیث ـ مک‌میلان $G(s)$ را بدین صورت بدست می‌آوریم

$$G(s)\sim\frac{1}{d(s)}S(s)=M(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{(s+1)(s+2)} & 0\\ 0 & \frac{s-2}{s+1}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

- **یک مثال**

ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+2)(s-1)} \end{bmatrix}$$

داریم

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)}\begin{bmatrix} (s-1)(s+2) & 0 & (s-1)^2 \\ 0 & (s+2)(s-1) & s+1 \end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{d(s)}P(s)$$

بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک کهادهای ۱×۱ $P(s)$ 1 می‌باشد و کهادهای 2×2 $P(s)$ عبارتند از

$$\begin{vmatrix} (s-1)(s+2) & 0 \\ 0 & (s-1)(s+2) \end{vmatrix}=(s-1)^2(s+2)^2\ , \quad \begin{vmatrix} (s-1)(s+2) & (s-1)^2 \\ 0 & s+1 \end{vmatrix}=(s^2-1)(s+2)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & (s-1)^2 \\ (s+2)(s-1) & s+1 \end{vmatrix}=-(s-1)^3(s+2)$$

و بزرگترین مقسوم علیه مشترک این کهادها $(s-1)(s+2)$ می‌باشد. لذا فرم اسمیث ـ مک‌میلان ماتریس تابع تبدیل عبارتست از

$$M(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 \end{bmatrix}$$

یک مثال

ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(s+1)(s+3)} & 0\\ \dfrac{-1}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{2(s+1)}{s+3}\end{bmatrix}$$

داریم

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+3)}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2(s+1)^2\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{d(s)}P(s)$$

بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک کهادهای ۱×۱ $P(s)$ 1 می‌باشد و برای کهادهای ۲×۲ م
$2(s+1)^2$ است. صورت اسمیث $P(s)$ عبارتست از

$$S(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & (s+1)^2\end{bmatrix}$$

که در آن $2(s+1)^2$ برای تکین شدن نرمالیزه شده است. با توجه به $S(s)$ صورت اسم
مک‌میلان $G(s)$ عبارتست از

$$M(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(s+1)(s+3)} & 0\\ 0 & \dfrac{s+1}{s+3}\end{bmatrix}$$

- روش نمایش اسمیث مک میلان

$$G(s)=\frac{1}{d(s)}N(s)$$

$N(s)$ Polynomial Matrix,

$d(s)$ lcd all the TFN elements.

$$L(s)N(s)R(s)=S(s)$$

$$M(s)=\frac{1}{d(s)}S(s)=\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & & 0 & 0\\ & \ddots & & \\ & & \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} & \\ 0 & & 0 & 0\end{bmatrix}$$

داریم

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = L(s)M(s)R(s)U(s)$$

$$= L(s)\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} & \\ 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix} R(s)U(s)$$

$$\|Y(s)\| \to \infty, \quad \text{for } \|U(s)\| < \infty \text{ and finite } s \quad \Leftrightarrow \psi_i(s) \to 0$$

لذا قطب های سیستم مجموعه کلیه صفرهای چند جمله ای های زیر است:

$$\{\psi_i(s) : i = 1, \cdots, r\}$$

نکته: این مجموعه موقعیت و تعداد دقیق کلیه قطب های سیستم چندمتغیره را می دهد.

- **یک مثال**

$$M(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{(s+1)(s+2)} & 0\\ 0 & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}\Rightarrow \text{poles}=\{-1,-1,-2\}$$

$$M(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{(s-1)(s+2)^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{s-1}\end{bmatrix}\Rightarrow \text{poles}=\{1,1,-2,-2\}$$

$$M(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{(s+1)(s+2)} & 0\\ 0 & \frac{s+1}{s+2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow \text{poles}=\{-1,-2,-2\}$$

- **نوع سیستم های چند متغیره خطی**

  - نوع اسکالر: تعمیمی از ایده نوع در سیستم های SISO
  - تعریف و کاربرد نوع در سیستم های SISO
  - ایده ماتریس بهره dc ناویژه

$$\lim_{s\to 0}\Delta(s)\left|G(s)\right|\neq 0,$$

$$\text{where } \Delta(s) \text{ is the characteristic equation of } G(s)$$

- مثال ۳-۱۵

$$G(s) = \frac{1}{s\left(s+1\right)}\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ s^2 & s+1 \end{bmatrix}$$

چندجمله‌ای مشخصه‌ی سیستم عبارت است از $\Delta(s) = s^2(s+1)$ و لذا

$$\lim_{s\to 0} s^2\left(s+1\right)\frac{1}{s^2} = 1$$

بنابراین ماتریس بهره‌ی d.c ماتریس تابع تبدیل ناویژه است.

- تعریف سیستم چندمتغیره نوع l

تعریف ۳-۲ سیستم چندمتغیره‌ی فیدبک منفی واحد با m ورودی و m خروجی را نوع l گویند، اگر l بزرگ‌ترین عدد صحیح غیر منفی باشد که برای آن ماتریس تابع تبدیل حلقه باز را بتوان به صورت زیر نوشت

$$G(s)=\frac{1}{s^l}G'(s) \qquad (۳-۲-۲۶)$$

که در آن $G'(s)$ بهره‌ی d.c ناویژه دارد.

■ مثال ۳-۱۶

$$G(s) = \frac{1}{s}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{s^2}{s+1} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s}G'(s)$$

چندجمله‌ای مشخصه‌ی $G'(s)$ عبارت است از $s+1$. لذا

$$\lim_{s\to 0}\left(s+1\right)|G'(s)| = \lim_{s\to 0}\left(s+1\right)1 = 1$$

حال اگر در نظر بگیریم

$$G(s) = \frac{1}{s^2}\begin{bmatrix} s & 0 \\ \dfrac{s^3}{s+1} & s \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2}G'(s)$$

چندجمله‌ای مشخصه‌ی $G'(s)$ عبارت است از $s+1$. لذا

$$\lim_{s\to 0}\left(s+1\right)|G'(s)| = \lim_{s\to 0}\left(s+1\right)s^2 = 0$$

بنابراین، سیستم فیدبک واحد با ماتریس تابع تبدیل $G(s)$ نوع ۱ است.

- کاربرد تعریف سیستم چندمتغیره نوع l در ردیابی سیگنال ها

- **مثال** ماتریس تابع تبدیل واحد تولید فولاد

$$G(s)=\frac{1}{s}\begin{bmatrix}\dfrac{6}{1+0.4s} & \dfrac{-60}{1+0.05s}\\ \dfrac{-3}{1+0.4s} & \dfrac{160}{1+0.05s}\end{bmatrix}=\frac{1}{s}G'(s)$$

$$poles:0,0,-2.5,-20$$

$$\text{and }\lim_{s\to 0}\Delta'(s)G'(s)=780\neq 0\Rightarrow\text{ Multivariable system is type one}$$

پاسخ های حلقه بسته:

- نوع برداری: به مثال دقت کنید

$$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ \dfrac{1}{s+3} & \dfrac{1}{s(s+2)} \end{bmatrix}$$

- نوع مخلوط و نوع برداری

- تعریف نوع برداری: سیستم چند متغیره نوع $\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_m \end{bmatrix}$

تعریف ۳-۳ سیستم چندمتغیره خطی با فیدبک منفی واحد را نوع $[l_۱, l_۲, \cdots, l_m]$ گویند، اگر هر l_i، $i = ۱, \cdots, m$ ، بزرگترین عدد صحیحی است که ماتریس تابع تبدیل حلقه باز $\mathrm{G}(s)$ را میتوان به صورت زیر نوشت

$$G(s) = H(s)G'(s)$$

که در آن

$$H(s) = diag\left[\frac{۱}{s^{l_۱}}, \frac{۱}{s^{l_۲}}, \cdots, \frac{۱}{s^{l_m}}\right]$$

که در آن $\mathrm{G}'(s)$ صفری در مبداء ندارد. در اینجا، $\mathrm{G}(s)$ را ماتریس تابع تبدیل نوع $[l_۱, l_۲, \cdots, l_m]$ مینامند.

با شرط پایداری حلقه بسته، سیستم حلقه بسته با فیدبک منفی واحد که تابع تبدیل حلقه باز آن سیستم نوع $[l_1, l_2, \cdots, l_m]$ است، برای ورودی‌های مرجع به صورت زیر، خطای حالت ماندگار صفر خواهد داشت

$$\mathbf{y}_{\mathrm{d}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{a_1 t^{k_1}}{k_1!} & \frac{a_2 t^{k_2}}{k_2!} & \cdots & \frac{a_m t^{k_m}}{k_m!} \end{bmatrix}^T$$

که در آن برای $l_i > 0$، a_iها ثابت‌های حقیقی دلخواه و k_iها اعداد صحیح در بازه‌ی $0 \le k_i < l_i$ هستند.

- مثال

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{s}{s+3} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

پاسخ های حلقه بسته:

- **صفرها در سیستم های چند متغیره**

نقش صفرها در سیستم های خطی:

- بر حالت گذرا تاثیر گذارند.
- اکیدا سره، سره یا ناسره بودن را تعیین می کنند.
- مینیمم یا غیر مینیمم فاز بودن را تعیین می کنند.
- پایداری معکوس سیستم را تعیین می کنند.
- محل مکان ریشه به ازا بهره های بسیار بالا.
- نقش کلیدی در تحلیل پایداری نایکویست معکوس.
- فیدبک بر آنها تاثیرگذار نیست.
- خاصیت بلوکه کردن انتقال را دارند.

تعاریف گوناگون از صفرهای سیستم های چندمتغیره:

- صفرهای عنصر
- صفرهای دکوپله
- صفرهای انتقال
- صفرهای تغییرناپذیر
- صفرهای سیستم

مهم ترین صفر، صفری است که تمام ویژگی های ارایه شده را داشته باشد.

▪ صفرهای عنصر

$$G(s) = \left[g_{ij}(s) \right] = \left[\frac{b_{ij}(s)}{a_{ij}(s)} \right] \qquad i = 1, \cdots, l \quad j = 1, \cdots, m$$

Element Zeros are given by $b_{ij}(s) = 0 \qquad i = 1, \cdots, l \quad j = 1, \cdots, m$

مثال

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+3} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{No Element Zero}$$

$$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{s-1}{s^2+1} & \dfrac{2}{s+3} \\ \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{s+1}{(s+3)(s+1)} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \text{Element Zeros at } s=\pm 1$$

نکته: کاربرد این نوع صفر *تنها* در کنترل غیر متمرکز است.

نکته: سیستم ممکن است که می نیمم فاز یا غیر می نیمم فاز باشد، ولی این رفتار در صفر عنصر آن مشاهده نگردد.

• رتبه ماتریس تابع تبدیل

رتبه عادی یا طبیعی

مثال ۳-۲۱ برای ماتریس تابع تبدیل زیر

$$G_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

داریم $|G_1(s)| = \frac{2s+1}{s^2(s+1)^2}$. لذا رتبه‌ی عادی $G_1(s)$ برابر ۲ است، زیرا رتبه‌ی $G_1(s)$ به ازاء تقریباً تمامی sها ۲ است. رتبه‌ی $G_1(s)$ تنها در $s = -0/5$ برابر ۱ است. اما برای ماتریس تابع تبدیل زیر

$$G_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{s}{s+2} \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

داریم $|G_2(s)| = 0$ به ازاء تمام sها، زیرا ستون دوم s برابر ستون اول است و رتبه‌ی $G_2(s)$ نیز ۱ است.

■

- **صفرهای انتقال(Transmission Zeros):** این صفرها مهم ترین صفرهای سیستم های چندمتغیره هستند، که تمام مشخصه های ذکر شده را در بر دارند. در واقع، در بسیاری از مراجع صفرهای سیستم های چندمتغیره را همان صفرهای انتقال می دانند.

مشخصه کلیدی صفرهای انتقال بلوکه کردن انتقال است. به عبارت دیگر برای *بردار* ورودی غیر صفر در مقادیر مشخصی از فرکانس *بردار* خروجی صفر می شود:

$$u(t) \neq 0 \Rightarrow y(t) \equiv 0$$

Let $u(t) = u_0 e^{st}$, and correspondingly $x(t) = x_0 e^{st}$:

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x_z + (sI - A)^{-1} B \frac{u_z}{s - z}$$

$$= (sI - A)^{-1} [x_z + B \frac{u_z}{s - z}]$$

$$= (sI - A)^{-1} [x_z + \frac{(zI - A) x_z}{s - z}]$$

$$= (sI - A)^{-1} [(sI - A) \frac{x_z}{s - z}] = \frac{x_z}{s - z} \Rightarrow x(t) = x_z e^{zt}$$

Let $u(t) = u_0 e^{st}$, and correspondingly $x(t) = x_0 e^{st}$, then

$$sx_0 e^{st} = Ax_0 e^{st} + Bu_0 e^{st}$$

$$0 = Cx_0 e^{st} + Du_0 e^{st}$$

Then,

$$\begin{bmatrix} sI_n - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = 0$$

Then,

$$\begin{vmatrix} sI_n - A & -B \\ C & D \end{vmatrix} = 0$$

This is the zero polynomial of the plant.

Determinantal Expansion of,

$$\begin{vmatrix} sI_n - A & -B \\ C & D \end{vmatrix} = 0$$

gives,

$$z(s) = |sI_n - A| \left| D + C(sI_n - A)^{-1} B \right| = p(s)|G(s)|$$

and,

$$|G(s)| = \frac{z(s)}{p(s)}$$

Note the Blocking Property.

یک مشاهده مهم:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = L(s)M(s)R(s)U(s)$$

$$= L(s)\begin{bmatrix} \dfrac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \dfrac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} & \\ 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix} R(s)U(s)$$

$$Y(s) = 0, \quad \text{for } U(s) \neq 0 \text{ and finite } s \quad \Leftrightarrow \varepsilon_i(s) = 0$$

لذا صفرهای انتقال سیستم مجموعه کلیه صفرهای چند جمله ای های زیر است:

$$\left\{\varepsilon_i(s) : i = 1, \cdots, r\right\}$$

نکته: این مجموعه موقعیت و تعداد دقیق کلیه صفرهای انتقال سیستم چندمتغیره را می دهد.

- **یک مثال**

$$M(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+3)} & 0 \\ 0 & \frac{-s+1}{s+1} \end{bmatrix}$$

قطبها = $\{-1,-1,-3\}$ صفرها = $\{1\}$

$$M(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{s^2-3s+3}{s+1} \end{bmatrix}$$

قطبها = $\{-1,-1\}$ صفرها = $\left\{\frac{3}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

$$M(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s-1}{s+2} & 0 \end{bmatrix}$$

قطبها = $\{-1,1,-2,-2\}$ صفر = $\{1\}$

$$M(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{s-2}{s+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

قطبها = $\{-1,-1,-2\}$ صفر = $\{2\}$

- **یک مثال**

ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{s-1}{(s+1)^2} & \dfrac{5s+1}{(s+1)^2}\\ \dfrac{-1}{(s+1)^2} & \dfrac{s-1}{(s+1)^2}\end{bmatrix}$$

این تابع تبدیل ۲ صفر عنصر ناپایدار در ۱ دارد. صورت اسمیث ـ مک‌میلان آن عبارتست از

$$M(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(s+1)^2} & 0\\ 0 & \dfrac{s+2}{s+1}\end{bmatrix}$$

لذا سیستم می‌نیمم فاز است و صفر انتقال آن در 2- قرار دارد.

- صفرهای انتقال در نمایش فضای حالت

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ C(sI - A)^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ 0 & G(s) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Rank Deficiency in $G(s)$

is equivalent to Rank Deficiency in $P(s)$

مثال ۳-۲۳ سیستم چندمتغیره‌ی داده شده با معادلات فضای حالت زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} ۱ & -۸ & -۸ \\ ۱ & -۵ & -۴ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

و ماتریس تابع تبدیل متناظر آن عبارت است از

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{۱}{s+۱} & \dfrac{۲}{s+۳} \\ \dfrac{۱}{s+۱} & \dfrac{۱}{s+۱} \end{bmatrix}$$

برای $s=۱$ که $|\mathbf{G}(۱)|=۰$ و لذا سیستم غیر می‌نیمم‌فاز با صفر ناپایدار در ۱ است. داریم

$$\mathbf{P}(s)=\left[\begin{array}{ccc:cc} s-۱ & ۸ & ۸ & ۰ & ۰ \\ -۱ & s+۵ & ۴ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & s+۱ & ۱ & ۱ \\ \hdashline ۰ & -۱ & -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ \end{array}\right]$$

و

$$|\mathbf{P}(s)|=s-۱$$

که نشان می‌دهد سیستم صفر انتقالی در ۱ دارد.

■

- **جهت ها ی صفر انتقال در سیستم های چندمتغیره**

تعریف: در z_i صفر انتقال سیستم رتبه $G(z_i)$ کمتر از رتبه طبیعی $G(s)$ است و چند جمله ای صفر عبارت است از

$$z(s)=\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)$$

بردارهایی متناظر با یک صفر انتقال، جهت صفر خروجی و جهت صفر ورودی، وجود دارند.

توجه کنید که:

$$P(s)\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$$

که

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}$$

برای مقادیر

$$u_z \neq 0, x_z \neq 0, s = z$$

$$\left(zI_g - M\right)\begin{bmatrix} x_z \\ u_z \end{bmatrix} = 0$$

یک روش محاسبه صفرهای سیستم

که

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, I_g = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و این مساله مقدار ویژه تعمیم یافته است

• توجه کنید که اگر $s=z$ صفر *انتقال* سیستم باشد:

$$G(z)u_z = 0.y_z$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

جهت صفر ورودی جهت صفر خروجی

در عمل y_z معمولا از u_z مهمتر است. زیرا اطلاعاتی در رابطه خروجی ای که ممکن است کنترل آن دشوارتر باشد می دهد. دقت کنید که:

$$u_z^H G^H(z) = 0.y_z^H$$

$$u_z u_z^H G^H(z) y_z = u_z 0.y_z^H y_z \Rightarrow G^H(z) y_z = 0.u_z$$

$$\Rightarrow y_z^H G(z) = 0.u_z^H$$

- اگر $s=z$ صفر انتقال سیستم باشد:

$$\exists u(t) = u_z e^{zt} \Rightarrow y(t) \equiv 0$$

- مثال ۳-۲۴

- مثال ۳-۲۵

- **یک کاربرد جهت صفر خروجی در سیستم های غیرمی نیمم فاز:**

با فیدبک می توان اثرات نامطلوب صفر ناپایدار را به یک کانال خروجی انتقال داد به شرط آن که بردار صفر در آن کانال خروجی عنصر صفر نداشته باشد.
توجه کنید که:

$$y_z^H G(z) = 0, T(s) = G(s)K(s)\left(I + G(s)K(s)\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow y_z^H T(z) = 0$$

مثال

$$G(s) = \frac{1}{(0.2s+1)(s+1)}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+2s & 2 \end{bmatrix}$$

RHP Zero 0.5

$$y_z = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Design objective: Set-Point Tracking in $y = Tr$

Ideal Tracking: $T(0) = I$

Design I: Decoupling Design

$t_{12}(s) = t_{21}(s) = 0 \Rightarrow t_{11}(z) = 0, t_{22}(z) = 0$ (The unstable zero must be present in both diagonal elements)

A choice is: $T(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{-s+z}{s+z} & 0 \\ 0 & \dfrac{-s+z}{s+z} \end{bmatrix}$

Design II:

$T(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\beta_1 s}{s+z} & \dfrac{-s+z}{s+z} \end{bmatrix}$ Ideal control for the first O/P, unstable TZ has no EFFECT on it

$\Rightarrow 2(1) - \dfrac{\beta_1(0.5)}{0.5+0.5} = 0 \Rightarrow \beta_1 = 4$

Design III:

$$T(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{-s+z}{s+z} & \dfrac{\beta_2 s}{s+z}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$ Ideal control for the 2nd O/P, unstable TZ has no EFFECT on it

$$\Rightarrow 2\frac{\beta_2(0.5)}{0.5+0.5}-1=0 \Rightarrow \beta_2=1$$

- **تحلیل پاسخ:** از $y_z=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$ داریم که اثر صفر بر خروجی اول بیشتر است. جهت خروجی صفر در جهت اولین خروجی بیشتر است. لذا تداخل در حالت دوم بیشتر از حالت سوم است. هزینه بیشتری باید برای انتقال اثر صفر ناپایدار به خروجی دوم پرداخت کرد. در حالت اول ۲ صفر ناپایدار در حلقه بسته داریم، در حالی که تنها یک صفر ناپایدار در حلقه باز داریم. این هزینه دکوپله سازی سیستم غیر می نیمم فاز است.

Theorem 6.4 *Assume that $G(s)$ is square, functionally controllable and stable and has a single RHP-zero at $s = z$ and no RHP-pole at $s = z$. Then if the k'th element of the output zero direction is non-zero, i.e. $y_{zk} \neq 0$, it is possible to obtain "perfect" control on all outputs $j \neq k$ with the remaining output exhibiting no steady-state offset. Specifically, T can be chosen of the form*

$$T(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & \\ \frac{\beta_1 s}{s+z} & \frac{\beta_2 s}{s+z} & \cdots & \frac{\beta_{k-1} s}{s+z} & \frac{-s+z}{s+z} & \frac{\beta_{k+1} s}{s+z} & \cdots & \frac{\beta_n s}{s+z} \\ \vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{6.37}$$

where

$$\beta_j = -2\frac{y_{zj}}{y_{zk}} \text{ for } j \neq k \tag{6.38}$$

Proof: It is clear that (6.37) satisfies the interpolation constraint $y_z^H T(z) = 0$; see also Holt and Morari (1985b).

□

The effect of moving completely the effect of a RHP-zero to output k is quantified by (6.38). We see that if the zero is not "naturally" aligned with this output, i.e. if $|y_{zk}|$ is much smaller than 1, then the interactions will be significant, in terms of yielding some $\beta_j = -2y_{zj}/y_{zk}$ much larger than 1 in magnitude. In particular, we *cannot* move the effect of a RHP-zero to an output corresponding to a zero element in y_z, which occurs frequently if we have a RHP-zero pinned to a subset of the outputs.

مثال

$$G(s)=\begin{bmatrix} a & 1 \\ \frac{1}{s+1} & a \end{bmatrix} \Rightarrow z=\frac{1}{a^2}-1, y_z=\begin{bmatrix} -a \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |a|<1 \text{ gives a RHP zero}$$

یک صفر RHP برای $a=0.1$ و داریم: $y_z=\begin{bmatrix} -0.1 \\ 1 \end{bmatrix}$

لذا کنترل خروجی دوم دشوارتر است و برای کنترل ایده آل روی خروجی دوم مقدار شدیدتر تداخلی خواهد داد. برای کنترل ایده آل روی خروجی خواهیم داشت:

$$j=2 \Rightarrow \beta_2=-2\frac{1}{-0.1}=20$$

- **تعداد صفرهای انتقال:**
  - سیستم های غیر مربعی عموما صفر انتقال ندارند.
  - صفرهای انتقال در بی نهایت.
  - تعداد صفرهای انتقال محدود و در بی نهایت با قطب ها برابر است.
  - تعداد صفرهای انتقال در سیستم های سره یا اکیدا سره.
  - تعداد صفرهای انتقال محدود و رتبه اولین پارامتر مارکوف.

• جایابی صفرهای انتقال

چند نکته مهم:

- موقعیت صفرهای انتقال در عملکرد سیستم های چند متغیره نقش موثری دارد.
- مکان صفرهای انتقال به محل حسگرها و محرک ها بستگی دارد. (Control Structure Design)
- صفرهای انتقال ناپایدار محدودیت عملکردی شدید به همراه دارند.
- صفرهای انتقال با فیدبک تغییرناپذیرند.
- جایابی صفرهای انتقال بدون تغییرات سخت افزاری.

قضیه ۱ صفرهای انتقال با فیدبک حالت و خروجی استاتیک تغییرناپذیرند.

قضیه ۲ صفرهای انتقال با پیش یا پس جبران سازی استاتیک تغییرناپذیرند.

قضیه ۳ صفرهای انتقال با پیش و یا پس جبران سازی دینامیکی و فیدبک دینامیکی تغییرناپذیرند.

نکته: جبران سازی دینامیکی صفرهای انتقال به سیستم اضافه می کند.

- **دو روش جایابی صفرهای انتقال**

روش اول: تبدیل مساله جایابی صفرهای انتقال به یک مساله جایابی قطب با فیدبک استاتیک دینامیکی خروجی

روش دوم: کاربرد یک نمایش کانونیکال خاص در جایابی صفرهای انتقال

- **روش اول جایابی صفرهای انتقال**

قضیه سیستم کنترل پذیر و رویت پذیر زیر را در نظر بگیرید،

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$
$$A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}, C \in R^{l\times n}$$
$$\text{rank}B = m, \text{rank}C = l$$

با فیدبک خروجی ثابت به صورت زیر می توان تعداد $\min(n, m+l-1)$ از قطب های حلقه بسته را در مکان های مطلوب جایابی کرد:

$$u = Ky, \qquad K \in R^{m\times l}$$
$$\text{C-L Matrix:} \quad A - BKC$$

اگر سیستم مربعی باشد و $2m > n$
جایابی تمام قطب های حلقه بسته با ماتریس فیدبک رتبه کامل امکان پذیر است.

یادآوری: معکوس سیستم مربعی:

$$\dot{z}(t) = (A - BD^{-1}C)z(t) + BD^{-1}y(t)$$
$$u(t) = -D^{-1}Cz(t) + D^{-1}y(t)$$

معکوس ماتریس فیدبک خروجی ثابت را در مسیر پیش خور سیستم قرار دهید:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + K^{-1}u(t)$$

ماتریس حالت سیستم معکوس: $A - BKC$

نتیجه: جایابی قطب های سیستم معکوس و صفرهای انتقال سیستم اصلی.

قضیه شرط کافی برای جایابی تمام صفرهای انتقال سیستم مربعی با جبران سازی پیش خور بهره ثابت:

$$2m > n$$

از جایابی تمام قطب های حلقه بسته در مکان های مطلوب:

$$u = Ky, \qquad K \in R^{m \times m}$$

$$\text{C-L Matrix:} \quad A - BKC$$

تمام صفرهای انتقال سیستم زیر در همان مکان ها قرار خواهند گرفت:

$$(A, B, C, K^{-1})$$

- یک مثال

$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{\alpha}{s+3}\\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}\Rightarrow TZ=\left\{\frac{\alpha-3}{1-\alpha}\right\},\alpha=2\Rightarrow TZ=\{1\}$$

A State Space Realization:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & -8 & -8\\ 1 & -5 & -4\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}x$$

$2m>n$ and we have,

$$A-BKC=\begin{bmatrix}1 & -8 & -8\\ 1 & -5 & -4\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2\\ k_3 & k_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Let the desired TZ be $\{-2\}$ with the other two arbitary but stable close to -2:

$$A-BKC=\begin{bmatrix} 1 & -8 & -8 \\ 1 & -5+k_1 & -4+2k_1+k_2 \\ 0 & -(k_1+k_3) & -1-2(k_1+k_3)-k_4-k_2 \end{bmatrix}$$

$$k_1=-k_3, k_2=1, k_4=0, \Rightarrow$$

$$A-BKC=\begin{bmatrix} 1 & -8 & -8 \\ 1 & -5+k_1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, k_1=1 \Rightarrow \text{TZ}=\{-2, -1.5\pm j1.33\}$$

$$K=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ and the modefied plant is } (A, B, C, K^{-1}).$$

The corresponding modified TFN matrix is

$$G_m(s)=G(s)+K^{-1}$$

$$G_m(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{-s-1}{s+3} \\ \dfrac{s+2}{s+1} & \dfrac{s+2}{s+1} \end{bmatrix}$$

with the Smith-McMillan Form:

$$M(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+1)(s+3)} & 0 \\ 0 & \dfrac{(s+2)(s^2+3s+4)}{s+1} \end{bmatrix}$$

which is compatible with the previous result.

اگر:

$$2m < n$$

جایابی تمام قطب های حلقه بسته تنها با فیدبک دینامیکی امکان پذیر است:

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Gy(t)$$
$$u(t) = Hz(t) + Ey(t), \qquad z \in R^r$$

ماتریس سیستم حلقه بسته بعد از فیدبک دینامیکی:

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A - BEC & BH \\ -GC & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & H \\ G & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$
$$= \frown{A} - \frown{B} \begin{bmatrix} E & H \\ G & F \end{bmatrix} \frown{C}$$

یک مشاهده کلیدی:

سیستم حلقه بسته با فیدبک دینامیکی معادل فیدبک استاتیک زیر برای سیستم افزوده شده است:

$$\widehat{u}(t)=\begin{bmatrix} E & H \\ G & F \end{bmatrix}\widehat{y}(t)$$

انتخاب مرتبه فیدبک دینامیکی:

$$2m+2r>n+r \qquad \Rightarrow \qquad r>n-2m$$

اگر:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \leftrightarrow \quad G(s)$$

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Gy(t)$$
$$u(t) = Hz(t) + Ey(t) \leftrightarrow \quad D^{-1}(s)$$

آنگاه سیستم جبران شده عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & F - GE^{-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ GE^{-1} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C & -E^{-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + E^{-1}u \qquad \leftrightarrow G(s) + D^{-1}(s)$$

می توان نشان داد که صفرهای انتقال سیستم جبران شده مقادیر ویژه ماتریس زیر هستند:

$$\begin{bmatrix} A-BEC & BH \\ -GC & F \end{bmatrix}$$

قضیه جایابی تمام $n+r$ صفرهای انتقال سیستم مربعی $2m < n$ با جبران سازی پیش خور دینامیکی مرتبه $r > n-2m$ امکان پذیر است.

- یک مثال

سیستم یک ورودی یک خروجی زیر را در نظر بگیرید

$$g(s)=\frac{5s^2-9s-5}{s^3-8s^2+14s-5}$$

صفرهای سیستم در 2.245 و 0.4454- قرار دارند و لذا سیستم غیر می‌نیمم فاز است. یک تحقق می‌نیمال از $g(s)$ عبارتست از

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad c=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

از آنجاییکه $n>2m$ است لذا یک جبرانساز دینامیکی پیش‌خور با مرتبه $r=2(>n-2m)$ برای جایابی صفر آن لازم است. می‌توان نشان داد که برای مجموعه قطبهای مطلوب $\{-2.5,-2.0,-1.5,-1.0,-0.5\}$ ، معکوس جبرانساز دینامیکی عبارتست از

$$\dot{z}(t)=\begin{bmatrix} -6.355 & 3.729 \\ -19.288 & 11.019 \end{bmatrix} z(t)+\begin{bmatrix} 3.442 \\ 12.479 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix} 0.446 & -0.04526 \end{bmatrix} z(t)+\begin{bmatrix} 0.0438 \end{bmatrix} u(t)$$

تابع تبدیل سیستم افزوده شده (سیستم اصلی با جبرانساز پیش‌خور) عبارتست از

$$\hat{g}(s)=\frac{0.044s^5+0.328s^4+0.93s^3+1.23s^2+0.749s+0.169}{s^5-12.66s^4+53.21s^3-85.5s^2+49.93s-9.504}$$

که صفرهای انتقال آن در مکانهای مطلوب قرار گرفته‌اند. توجه کنید که اگر سیستم یا جبرانساز ناپایدار باشند، سیستم افزوده شده نیز ناپایدار خواهد بود.

- **روش دوم جایابی صفرهای انتقال**

سیستم کنترل پذیر و رویت پذیر زیر را در نظر بگیرید،

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}, C \in R^{m\times n}$$

$$\mathrm{rank}B = \mathrm{rank}C = m$$

که می توان به صورت زیر تبدیل شود:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left| sI_{n-m} - A_{11} + A_{12} C_2^{-1} C_1 \right| = 0, \quad \text{are the TZs.}$$

Define,

$$w(t) = y(t) + M \dot{x}_1(t)$$

Measurement Matrix

Then,

$$w(t) = \begin{bmatrix} C_1 + MA_{11} & C_2 + MA_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left| sI_{n-m} - A_{11} + A_{12} F_2^{-1} F_1 \right| = 0, \quad \text{are the NEW TZs.}$$

نکته مهم: مساله جایابی صفر انتقال به یک مساله جایابی قطب تبدیل شده است.

$$\left| sI_{n-m} - A_{11} + A_{12}F_2^{-1}F_1 \right| = 0$$

معادل بهره فیدبک حالت

شرط کنترل پذیری:

$$\begin{bmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} & 0 \\ -A_{21} & sI - A_{22} & B_2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Full Rank}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Full Rank}$$

Let,

$$K = F_2^{-1} F_1 \Rightarrow K = (C_2 + MA_{12})^{-1}(C_1 + MA_{11})$$

$$\Rightarrow M\,(A_{11} - A_{12}K) = C_2K - C_1$$

$$\Rightarrow M = (C_2K - C_1)(A_{11} - A_{12}K)^{-1}$$

A final important NOTE:

$$\lim_{t\to\infty} \dot{x}_1(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} w(t) = y(t)$$

الگوریتم جایابی صفر انتقال:

- نمایش می نیمال فضای حالت را بنویسید.
- نمایش می نیمال فضای حالت را به صورت کانونیکال داده شده تبدیل کنید.
- ماتریس فیدبک حالت را برای جایابی قطب تعیین کنید.
- ماتریس اندازه گیری را برای جایابی صفرهای انتقال محاسبه کنید.
- فیدبک داخلی را ببندید.

• یک مثال

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{\alpha}{s+3}\\ \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}\Rightarrow TZ=\left\{\frac{\alpha-3}{1-\alpha}\right\},\alpha=2\Rightarrow TZ=\{1\}$$

A State Space Realization: $\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & -8 & -8\\ 1 & -5 & -4\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}u,\ y=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}x$

$(1,\begin{bmatrix}-8 & -8\end{bmatrix})$ is a controllable pair. Therefore, $K=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{3}{8}\end{bmatrix}^T\Rightarrow M=\begin{bmatrix}\dfrac{6}{16} & \dfrac{3}{16}\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow F_1=\begin{bmatrix}\dfrac{6}{16}\\ \dfrac{3}{16}\end{bmatrix};F_2=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ -1.5 & -0.5\end{bmatrix}\Rightarrow\left|s-1+(-2)\begin{bmatrix}-8 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.5 & 1\\ 1.5 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{6}{16}\\ \dfrac{3}{16}\end{bmatrix}\right|=|s+2|$$