

# تحلیل و طراحی سیستم های کنترل چندمتغیره در حوزه فضای حالت

علی خاکی صدیق  
گروه کنترل - مهر ۱۳۹۹

## ● مقدمه

- مفاهیم پایه: کنترل پذیری و رویت پذیری
- کنترل پذیری تابعی (خروجی)
- نظریه تحقق
- کاهش مرتبه معادلات فضای حالت
- دکوپله سازی سیستم های چندمتغیره با فیدبک حالت

■ مفاهیم پایه: کنترل پذیری و رویت پذیری

•  
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times m}, C \in R^{l \times n}$$

$$\text{rank} B = m, \text{rank} C = l$$

شرط لازم و کافی کنترل پذیری سیستم:

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \in R^{n \times nm}$$

اندیس های کنترل پذیری سیستم:

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_m & Ab_1 & \cdots & Ab_m & \cdots & A^{n-1}b_1 & \cdots & A^{n-1}b_m \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} b_1 \quad Ab_1 \quad \cdots \quad A^{\mu_1-1}b_1 \rightarrow \mu_1 \\ \vdots \\ b_i \quad Ab_i \quad \cdots \quad A^{\mu_i-1}b_i \rightarrow \mu_i \end{array} \right\} (i = 2, \dots, m) \text{Controllability indices}$$

we have,

$$\sum_{i=1}^m \mu_i = n, \quad \nu_c = \max_i \mu_i \quad (i = 1, \dots, m) \text{Controllability index}$$

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{q-1}B \end{bmatrix} \quad (1 \leq q \leq n) \text{ Partial Controllability Matrix}$$

## یک مثال •

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

ماتریس کنترل پذیری سیستم عبارتست از

$$\Phi_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{Ab}_1 \quad \mathbf{Ab}_2$

رتبه  $\Phi_c$  برابر ۲ است و لذا سیستم کنترل پذیر حالت است. توجه کنید که  $\mathbf{b}_1$  و  $\mathbf{Ab}_1$  مستقل خطی می باشند و لذا  $\mu_1 = 2$  می باشد و در این حالت  $\mathbf{b}_1$  و  $\mathbf{b}_2$  وابسته خطی می باشند.

# یک مثال

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -21 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

ماتریس کنترل پذیری سیستم عبارتست از

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 8 & 3 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 4 & -21 & -14 \end{bmatrix}$$

$b_1 \quad b_2 \quad Ab_1 \quad Ab_2 \quad A^2b_1 \quad A^2b_2 \quad A^3b_1 \quad A^3b_2$

رتبه  $\Phi_c$  برابر ۴ است و لذا سیستم کنترل پذیر حالت است. داریم

$$b_1, b_2, Ab_1, Ab_2$$

بردارهای مستقل خطی هستند و لذا

$$b_1, Ab_1 \Rightarrow \mu_1 = 2$$

$$b_2, Ab_2 \Rightarrow \mu_2 = 2$$

$$\text{و } \mu_1 + \mu_2 = 4.$$

شرط لازم و کافی رویت پذیری سیستم.

اندیس های رویت پذیری سیستم.

ماتریس رویت پذیری جزئی سیستم.

سیستم های کنترل پذیر و رویت پذیر.

حذف قطب-صفر در سیستم های کنترل:

$$(sI - A)^{-1}B \quad \text{or} \quad C(sI - A)^{-1}$$

- کنترل پذیری و رویت پذیری در توصیف ماتریس سیستم

$$P(s) = \begin{bmatrix} P(s) & Q(s) \\ -R(s) & W(s) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G(s) = R(s)P^{-1}(s)Q(s) + W(s)$$

$$\text{Let, } |L(s)| \neq 0$$

$$P(s) = L(s)\bar{P}(s)$$

$$Q(s) = L(s)\bar{Q}(s)$$

$$\Rightarrow G(s) = R(s)\bar{P}^{-1}(s)\bar{Q}(s) + W(s)$$

آیا کاهش مرتبه ای در تشکیل ماتریس تابع تبدیل رخ داده است؟



به طور مشابه ای، اگر:

$$|D(s)| \neq 0$$

$$P(s) = \bar{P}(s)D(s)$$

$$R(s) = \bar{R}(s)D(s)$$

$$\Rightarrow G(s) = \bar{R}(s)\bar{P}^{-1}(s)Q(s) + W(s)$$

آیا کاهش مرتبه ای در تشکیل ماتریس تابع تبدیل رخ داده است؟

چند تعریف:

$$|L(s)| = 0 \Rightarrow \text{i.d.z}$$

$$|D(s)| = 0 \Rightarrow \text{o.d.z}$$

Let,

$$\{\beta_i\} = \text{i.d.z}, \{\gamma_i\} = \text{o.d.z}, \text{ and}$$

$\{\theta_i\} = \text{o.d.z}$  after removing all the i.d.z, then

$$\{\delta_i\} = \{\gamma_i\} - \{\theta_i\} = \text{i.o.d.z}$$

## یک مثال

ماتریس سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{P}(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} s+1 & 0 & 1 \\ 0 & s+2 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

یک i.d.z در  $\beta = -2$  وجود دارد و مود متناظر با این صفر از ورودی دکوپله است. یعنی آنکه، فرض کنیم که سیستم از شرایط اولیه صفر در  $t=0$  شروع شود و یک ورودی دلخواه در گستره زمانی  $0 < t \leq t_0$  به سیستم اعمال و بعد از آن ورودی صفر گردد. آنگاه حرکت آزاد برای  $t > t_0$  به صورت  $c_1 e^{-(t-t_0)} + c_2 e^{-2(t-t_0)}$  بوده و  $c_2$  صرفنظر از ورودی صفر خواهد بود. اگر ماتریس سیستم زیر را با استفاده از عملیات مقدماتی و توسط اکیداً معادل بودن سیستمی از  $\mathbf{P}(s)$  بدست آوریم

$$\mathbf{P}_1(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} (s+1) & 0 & 1 \\ -s(s+1) & s+2 & 2 \\ \hline -1 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

این ماتریس سیستم نیز یک i.d.z در  $\beta = -2$  دارد. در واقع

$$[\mathbf{P}(-2) \quad \mathbf{Q}(-2)] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

# یک مثال •

ماتریس سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{P}(s) = \left[ \begin{array}{ccc|c} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & s(s+1) & \mathbf{0} & s \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & s(s+2) & s \\ \hline \mathbf{0} & -1 & -1 & \mathbf{0} \end{array} \right]$$

داریم  $\{\beta_i\} = \{0,0\}$  و  $\{\gamma_i\} = \{0\}$ . با حذف i.d.z ها، ماتریس  $\mathbf{P}(s)$  به صورت زیر کاهش مرتبه پیدا می‌کند

$$\mathbf{P}_1(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} s+1 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & s+2 & 1 \\ \hline -1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

که o.d.z ندارد. از اینرو  $\{\theta_i\} = \emptyset$  و  $\{\delta_i\} = \{0\}$ .

## یک مثال •

ماتریس سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{P}(s) = \left[ \begin{array}{ccc|c} I_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & s(s+1) & \mathbf{0} & s \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & s(s+2) & 1 \\ \hline \mathbf{0} & -1 & -s & \mathbf{0} \end{array} \right]$$

داریم  $\{\beta_i\} = \{0\}$  و  $\{\gamma_i\} = \{0\}$ . لیکن یا حذف i.d.z، o.d.z باقی می ماند و لذا  $\{\delta_i\} = \emptyset$ . این نشان می دهد که صرفاً تطابق عددی مقادیر  $\gamma_i$  و  $\beta_i$  ایجاب نمی کند که آنها با  $\delta_i$  نیز مطابقت داشته باشند.

مثال ۴-۶ ماتریس سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{P}(s) = \left[ \begin{array}{cc|cc} s^2 + 2s + 2 & s + 2 & 0 & 2s + 6 \\ s + 1 & s + 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & s + 2 & 0 & 0 \\ s + 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

داریم  $\{\beta_i\} = \{-2\}$  و  $\{\gamma_i\} = \{-2, -1\}$ . توجه کنید که

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 2s + 2 & s + 2 \\ s + 1 & s + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2 + 2s + 2 & 1 \\ s + 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s + 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}(s) = \begin{bmatrix} 0 & s + 2 \\ s + 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ s + 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s + 2 \end{bmatrix}$$

لذا ماتریس سیستم بعد از حذف o.d.z در -۲ چنین می‌شود

$$\mathbf{P}_1(s) = \left[ \begin{array}{cc|cc} s^2 + 2s + 2 & 1 & 0 & 2s + 6 \\ s + 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ s + 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

از آنجایی که -۲ دیگر i.d.z نیست، لذا -۲ یک i.o.d.z است.



قطب سیستم:

$$|P(s)| = 0 \Rightarrow \{\alpha_i\} = \text{System matrix poles}$$

Let,

$$\{\eta_i\} = \{\alpha_i\} - \{ \{ \beta_i, \gamma_i \} - \{ \delta_i \} \}$$

Then,  $\{\eta_i\} = \text{TFN matrix poles}$

## یک مثال •

ماتریس سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$P(s) = \left[ \begin{array}{ccc|c} I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^2(s+1) & s(s+2) & -s \\ 0 & 0 & s+2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

داریم

$$\{\alpha_i\} = \{0, 0, -1, -2\}$$

که قطبهای ماتریس سیستم  $P(s)$ ، داده شده با  $|P(s)| = 0$  می باشند. همچنین بسادگی مشاهده می شود که

$$\{\beta_i\} = \{0\}$$

$$\{\gamma_i\} = \{0, 0, -1\}$$

$$\{\theta_i\} = \{0, -1\}$$

$$\{\delta_i\} = \{0\}$$

$$\{\eta_i\} = \{-2\}$$



## ■ کنترل پذیری تابعی (خروجی)

تعریف کنترل پذیری خروجی

شرط لازم و کافی کنترل پذیری خروجی

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} C B & CAB & \dots & CA^{n-1}B & D \end{bmatrix}$$

تعریف کنترل پذیری تابعی

$G(s)$  TFN Matrix with  $m$  inputs and  $l$  outputs

شرایط کنترل پذیری تابعی:

1.  $m$  inputs  $\geq l$  outputs

2.  $\text{rank}G(s) = l$

سوال اصلی:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$\exists U(s) \text{ s.t. } Y_R(s) = Y(s)?$$

با برآورده شدن شرایط بالا:

$$U(s) = G^T(s)[G(s)G^T(s)]^{-1}Y_R(s)$$

## • یک مثال

سیستم توصیف شده با ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+3} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

داریم

$$|G(s)| = \frac{-(s-1)}{(s+1)^2(s+3)}$$

و لذا سیستم کنترل پذیر تابعی است. لیکن تحقق داده شده زیر، برای ماتریس تابع تبدیل  $G(s)$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

کنترل پذیر حالت نمی باشد.

مثال ۹-۴ سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

می‌توان نشان داد که  $\text{رتبه}\{\Phi_o\} = \text{رتبه}\{\Phi_c\} = ۳$  و سیستم کنترل‌پذیر حالت و رؤیت‌پذیر است. همچنین، از آنجاییکه C رتبه کامل است و  $\text{رتبه}\{\Phi_o\} = ۳$ ، سیستم کنترل‌پذیر خروجی نیز است. از طرف دیگر، داریم

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s^3} \end{bmatrix}$$

لذا سیستم کنترل‌پذیر تابعی نیست.



مثال ۴-۱۰ سیستم دو ورودی و دو خروجی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

اگر سیستم کنترل پذیر تابعی نباشد، داریم

$$g_{11}(s)g_{22}(s) = g_{12}(s)g_{21}(s)$$

لذا

$$\begin{aligned} y_2(s) &= g_{21}(s)u_1(s) + g_{22}(s)u_2(s) \\ &= g_{21}(s)u_1(s) + \frac{g_{12}(s)g_{21}(s)}{g_{11}(s)}u_2(s) \\ &= \frac{g_{21}(s) \left( g_{11}(s)u_1(s) + g_{12}(s)u_2(s) \right)}{g_{11}(s)} \\ &= \frac{g_{21}(s)}{g_{11}(s)}y_1(s) \end{aligned}$$

این معادله نشان می‌دهد که  $y_1(s)$  و  $y_2(s)$  به هم وابسته‌اند و نمی‌توان دو خروجی را به طور مستقل از هم کنترل کرد و بنابراین سیستم کنترل پذیر تابعی نیست.



- نظریه تحقق در سیستم های چندمتغیره

- مفاهیم پایه: تحقق می نیمال و تحقق های کانونیکال

- تحقق غیرمی نیمال و کاهش مرتبه

- تحقق گیلبرت

## ■ تحقق های غیرمی نیمال یا مستقیم

نمایش ستونی (یا به طور مشابه) ردیفی ماتریس تابع تبدیل:

$$G(s) = [g_1(s) \quad \cdots \quad g_m(s)]$$

$$g_{ij}(s) = \frac{\beta_1^{ij} s^{\delta_j - 1} + \beta_2^{ij} s^{\delta_j - 2} + \cdots + \beta_{\delta_j}^{ij}}{s^{\delta_j} + \alpha_1^j s^{\delta_j - 1} + \cdots + \alpha_{\delta_j}^j} \longrightarrow \beta^{ij} = \begin{bmatrix} \beta_{\delta_j}^{ij} \\ \beta_{\delta_j - 1}^{ij} \\ \vdots \\ \beta_1^{ij} \end{bmatrix}$$

$$\alpha^j = \begin{bmatrix} \alpha_{\delta_j}^j \\ \alpha_{\delta_j - 1}^j \\ \vdots \\ \alpha_1^j \end{bmatrix}$$

تحقق کانونیکال کنترول پذیر:

$$g_{ij}(s) = \frac{\beta_1^{ij} s^{\delta_j - 1} + \beta_2^{ij} s^{\delta_j - 2} + \dots + \beta_{\delta_j}^{ij}}{s^{\delta_j} + \alpha_1^j s^{\delta_j - 1} + \dots + \alpha_{\delta_j}^j}$$



$$A_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_{\delta_j}^j & -\alpha_{\delta_j - 1}^j & \dots & -\alpha_1^j \end{bmatrix}, b_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$c_{ij} = [\beta^{ij}]^T$$



ترکیب تحقق های کانونیکال کنترل پذیر برای سیستم چندمتغیره:

$$A_c = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_m \end{bmatrix}$$
$$C_c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{l1} & c_{l2} & \cdots & c_{lm} \end{bmatrix}$$

## یک مثال

ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-1)^2} & \frac{1}{(s-1)(s+3)} \\ \frac{-6}{(s-1)(s+3)^2} & \frac{s-2}{(s+3)^2} \end{bmatrix}$$

داریم

$$\begin{aligned} g_1(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-1)^2} \\ \frac{-6}{(s-1)(s+3)^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-1)^2(s+3)^2} \begin{bmatrix} (s+3)^2 \\ -6(s-1) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^4 + 4s^3 - 2s^2 - 12s + 9} \begin{bmatrix} s^2 + 6s + 9 \\ -6s + 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

از اینرو  $\delta_1 = 4$ . توجه کنید که ماتریس‌های حالت و ورودی تحقق‌های کنترل‌پذیر  $g_{11}(s)$  و  $g_{12}(s)$  یکسان هستند ولی ماتریس‌های خروجی آنها تفاوت می‌کند. از  $g_1(s)$  بدست

می‌آوریم

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -9 & 12 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c_{11} = [\beta_{\delta_1}^{11}]^T = [9 \ 6 \ 1 \ 0]$$

$$c_{21} = [\beta_{\delta_1}^{21}]^T = [6 \ -6 \ 0 \ 0]$$

از  $g_2(s)$  نیز، بدست می‌آوریم

$$g_2(s) = \frac{\frac{1}{(s-1)(s+3)} \cdot \frac{s-2}{(s+3)^2}}{\frac{s-2}{(s+3)^2}} = \frac{1}{(s-1)(s+3)^2} \begin{bmatrix} s+3 \\ s^2-3s+2 \end{bmatrix}$$

از اینرو  $\delta_2=3$  و لذا

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -9 & -3 & -5 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c_{12} = [\beta_{\delta_2}^{12}]^T = [3 \ 1 \ 0]$$

$$c_{22} = [\beta_{\delta_2}^{22}]^T = [2 \ -3 \ 1]$$

بنابراین تحقق کامل کنترل‌پذیر از معادله (۳-۵-۳) به صورت زیر است

$$A_c = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ -9 & 12 & 2 & -4 & & & \\ \hline & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 9 & -3 & -5 \end{array} \right]$$

$$B_c = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|ccc} 0 & & & & \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & & & & \\ 1 & & & & \\ \hline & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ & & & & 1 \end{array} \right]$$

$$C_c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 6 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 6 & -6 & 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

- تحقق قطری (گیلبرت) فضای حالت

حالت اول: ماتریس تابع تبدیل با قطب های غیر تکراری حقیقی  
فرض کنید که:


$$\Lambda = \text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}, B_n, C_n, D$$



$$D = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s)$$

از صورت اسمیث مک میلان محاسبه می شود.

داریم

$$G(s) = \mathbf{C}_n \text{diag} \{s - \lambda_1, \dots, s - \lambda_n\} \mathbf{B}_n + D = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{G}_k}{s - \lambda_k} + D$$


مانده های ماتریس تابع تبدیل هستند:

$$\mathbf{G}_k = \lim_{s \rightarrow \lambda_k} (s - \lambda_k) G(s)$$

and

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{c}_{nk} \mathbf{b}_{nk}^T \longrightarrow \mathbf{k} \text{ امین ستون و ردیف ماتریس خروجی و ورودی}$$

# یک مثال

ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} & \frac{1}{s+4} \\ 0 & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+4} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)} & 0 \end{bmatrix}$$

از (۷-۵-۳)، داریم

$$G_1 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$c_{n_1}$   $b_{n_1}^T$

به طور مشابهی

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad G_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad G_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$c_{n_2}$   $b_{n_2}^T$   $c_{n_3}$   $b_{n_3}^T$   $c_{n_4}$   $b_{n_4}^T$

بنابراین تحقق عبارتست از

$$\Lambda = \text{diag}\{-1, -2, -3, -4\} \quad B_n = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می شود،  $s = -3$  یک قطب رؤیث ناپذیر سیستم است، با حذف این قطب

یک تحقق مرتبه سوم و می نیمال به صورت زیر خواهیم داشت

$$\Lambda = \text{diag}\{-1, -2, -4\} \quad B_n = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

حالت دوم: ماتریس تابع تبدیل با قطب های تکراری حقیقی

برای ساده تر شدن مساله فرض کنید که ماتریس تابع تبدیل یک قطب های مکرر با تعدد ۳ دارد. بسط کسرهای جزئی می دهد:

$$G(s) = \frac{1}{(s - \lambda)^3} M_1 + \frac{1}{(s - \lambda)^2} M_2 + \frac{1}{(s - \lambda)} M_3$$

9

$$\text{rank}(M_1) = r_1$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = r_2$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = r_3$$

$$\{b_{l_1}, \dots, b_{l_{r_1}}\}$$

$$\{b_{l_1}, \dots, b_{l_{r_1}}, b_{l_{(r_1+1)}}, \dots, b_{l_{r_2}}\}$$

$$\{b_{l_1}, \dots, b_{l_{r_1}}, b_{l_{(r_1+1)}}, \dots, b_{l_{r_2}}, b_{l_{(r_2+1)}}, \dots, b_{l_{r_3}}\}$$

نکته:  $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq m$

با تعریف بردارهای ستونی مناسب، داریم:

$$\begin{aligned} M_1 &= c_{11} b_{l1} + c_{12} b_{l2} + \dots + c_{1r_1} b_{lr_1} \\ &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{l1} \\ b_{l2} \\ \vdots \\ b_{lr_1} \end{bmatrix} \square C_{r_1}^l B_{r_1}^l \\ \Rightarrow C_{r_1}^l &= M_1 (B_{r_1}^l)^T [B_{r_1}^l (B_{r_1}^l)^T]^{-1} \end{aligned}$$



به طور مشابه:

$$M_2 = \begin{bmatrix} c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2r_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{l1} \\ b_{l2} \\ \vdots \\ b_{lr_2} \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} c_{31} & c_{32} & \cdots & c_{3r_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{l1} \\ b_{l2} \\ \vdots \\ b_{lr_3} \end{bmatrix}$$

- نکته ۱:  $r_3$  بلوک جردن وجود دارد. اولین  $r_1$  بلوک جردن بعدی برابر تعدد قطب متناظر با  $M_1$  دارند.
- نکته ۲: دومین  $r_2 - r_1$  بلوک های جردن بعدی برابر تعدد قطب متناظر با  $M_2$  دارند.
- نکته ۳: سومین  $r_3 - r_2$  بلوک های جردن بعدی برابر تعدد قطب متناظر با  $M_1$  دارند.
- نکته ۴: تحقق کنترل پذیر است ولی لزوماً رویت پذیر نیست.

## • یک مثال

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+1)^2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} M_1 + \frac{1}{(s+1)} M_2 \Rightarrow G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{(s+1)} 0$$

$$\Rightarrow r(M_1) = 2 = r_1, \text{ and } M_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow r \left( \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \right) = 2 = r_2, \text{ and the number of Jordan blocks of order 2 is 2 and 1 is 0.}$$

$$\square \quad x = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

## • یک مثال

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)} & \frac{1}{(s+2)} \end{bmatrix} \Rightarrow M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} M_1 + \frac{1}{(s+1)} M_2 + \frac{1}{(s+2)} M$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{(s+1)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{(s+2)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow r(M_1) = 1 = r_1, \text{ and } M_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ one Jordan block of order 2.}$$

$$\Rightarrow r \left( \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \right) = 1 = r_2, \text{ and } M_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} r_2 - r_1 = \text{zero Jordan block of order 1.}$$

$$\Rightarrow r(M) = 1, \text{ and } M = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

## • یک مثال

$$G(s) = \frac{1}{s^4} \begin{bmatrix} s^3 - s^2 + 1 & 1 & -s^3 + s^2 - 2 \\ 1.5s + 1 & s + 1 & -1.5s - 2 \\ s^3 - 9s^2 - s + 1 & -s^2 + 1 & s^3 - s - 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{s^4} M_1 + \frac{1}{s^3} M_2 + \frac{1}{s^2} M_3 + \frac{1}{s} M_4$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow G(s) &= \frac{1}{s^4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \frac{1}{s^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & -1.5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow r(M_1) = 1 = r_1, \text{ and } M_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ one Jordan block of order 4.}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & -1.5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow r\left(\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}\right) = 2 = r_2, \text{ and } M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

and  $r_2 - r_1 =$  one Jordan block of order 3.

$$M_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r\left(\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}\right) = 3 = r_3, \text{ and } M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

and  $r_3 - r_2 =$  one Jordan block of order 2.

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow r\left(\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix}\right) = 3 = r_4, \text{ and } r_4 - r_3 = \text{zero Jordan block of order 1.}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & \\ & & & 0 & & & & & \\ & & & & 0 & 1 & 0 & & \\ & & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & 0 & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 5 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} x$$

The Plant  
is  
Controllable  
but  
Unobservable



## ■ کاهش مرتبه معادلات فضای حالت

- معادلات فضای حالت غیر می نیمال
- معادلات فضای حالت می نیمال

## ■ کاهش مرتبه سیستم های غیرمی نیمال

تحقق کانونیکال کنترل پذیر:

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI_{\delta_1} - A_1 & 0 & \dots & 0 & B_1 \\ 0 & sI_{\delta_2} - A_2 & & & B_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & sI_{\delta_m} - A_m & B_m \\ -C_1 & -C_2 & \dots & -C_m & D(s) \end{bmatrix}$$

می توان با اجرای عملیات مناسب صفرهای دکوپله خروجی را شناسایی و حذف کرد:

$$\bar{\mathbf{P}}(s) = \begin{bmatrix} sI_u - A_u & A_{12} & B_u \\ 0 & sI_o - A_o & B_o \\ 0 & -C_o & D(s) \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{P}_{\min}(s) = \begin{bmatrix} sI_o - A_o & B_o \\ -C_o & D(s) \end{bmatrix}$$

دو نکته:

- روند مشابه برای سیستم های کنترل ناپذیر
- اعمال الگوریتم بر روی:

$$N = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

## • یک مثال

ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید [8]

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+3}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

یک تحقق به صورت همبسته رویت پذیر از  $G(s)$  عبارتست از

$$P(s) = \begin{bmatrix} s & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & s & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & s+4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & s & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & s & 8 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & s+5 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

این تحقق رویت پذیر است، لیکن لزوماً کنترل پذیر نیست. برای تعیین موده‌های احتمالی کنترل ناپذیر از الگوریتم بالا استفاده می‌کنیم ولی نخست صورت (۳-۶-۱۰) را می‌نویسیم

$$N = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|cc} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

بعد از اعمال الگوریتم بالا داریم

$$N = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|cc} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

با مقایسه با معادله (۳-۶-۷) داریم که  $A_{11}$  یک بلوک  $2 \times 2$  است و لذا ۲ مود کنترل ناپذیر (صفر دکوپله ورودی) وجود دارد. با حذف اولین دو ردیف و ستون از  $N$ ، یک نمایش فضای حالت می‌نیمال از  $G(s)$  به صورت زیر و با مقایسه با معادله (۳-۶-۹) بدست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## ■ کاهش مرتبه معادلات فضای حالت می نیمال

معادلات فضای حالت و خروجی کنترل پذیر و رؤیت پذیر زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (10-5-4)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (11-5-4)$$

که در آن  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ،  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  و  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^l$  و ماتریس‌های ثابت  $\mathbf{A}$ ،  $\mathbf{B}$ ،  $\mathbf{C}$  و  $\mathbf{D}$  با ابعاد مناسب هستند. فرض کنید که بخواهیم مرتبه‌ی سیستم می‌نیمال را از  $n$  به  $k$  کاهش دهیم. به عبارت دیگر، سیستم داده شده با معادلات (10-5-4) و (11-5-4) را با معادلات مرتبه‌ی  $k$  یی چنان نمایش دهیم که مشخصه‌های اصلی سیستم حفظ شده و خطای کاهش مرتبه حداقل باشد.

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \\ \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u \\ y = C_1x_1 + C_2x_2 + Du \end{cases}$$

■ دو روش متداول:

روش برش

روش مانده گذاری

■ روش برش

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{u}(t) \quad (۱۵-۵-۴)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (۱۶-۵-۴)$$

ماتریس‌های تابع تبدیل متناظر با معادلات اصلی و مرتبه کاهش یافته‌ی سیستم را به ترتیب با  $G(s)$  و  $G_r(s)$  نمایش دهید. بدیهی است که  $G_r(\infty) = G(\infty) = D$  و لذا کاهش مرتبه به روش برش، پاسخ فرکانس بالای سیستم را تغییر نمی‌دهد.



## حالت قطری:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \circ & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \circ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_n^T \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \mathbf{x}(t)$$

که در آن مقادیر ویژه سیستم به صورت  $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n|$  مرتب شده‌اند. اگر با بُرش،  $n - k$  مودهای سریع سیستم را حذف کنیم داریم

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \circ & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \circ & & & \lambda_k \end{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) + \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_k^T \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (19-5-4)$$

$$\mathbf{y}(t) = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_k] \dot{\mathbf{x}}_1(t) \quad (20-5-4)$$

بدیهی است که در این حالت (بُرش مدال) خطای مدل‌سازی را می‌توان با تفاضل ماتریس‌های تابع تبدیل متناظر با (17-5-4)، (18-5-4) و (19-5-4)، (20-5-4) به صورت زیر تعیین کرد

$$G(s) - G_r(s) = \sum_{i=k+1}^n \frac{c_i b_i^T}{s - \lambda_i} \quad (21-5-4)$$

این معادله مقدار خطای کاهش مرتبه را بیان می‌کند و در آن  $c_i b_i^T$  ماتریس مانده تابع تبدیل از قطب  $\lambda_i$  است.

همان‌طور که به‌سادگی مشاهده می‌شود مقدار خطا به موقعیت قطب و ماتریس مانده بستگی دارد. با گرفتن نرم بی‌نهایت از معادله (۴-۵-۲۱) داریم

$$\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq \sum_{i=k+1}^n \frac{\bar{\sigma}(c_i b_i^T)}{|\operatorname{Re}(\lambda_i)|}$$

که در آن  $\bar{\sigma}(0)$  بزرگ‌ترین مقدار استثنایی را نشان می‌دهد. لذا در تحلیل کاهش مرتبه به روش بُرش باید علاوه بر دوری قطب از محور موهومی به مقدار بزرگ‌ترین مقدار استثنایی ماتریس مانده‌ی آن قطب نیز توجه کرد و موقعیت قطب به تنهایی معیار دقیقی برای حذف یا نگهداری یک قطب در مدل مرتبه کاهش یافته نیست.

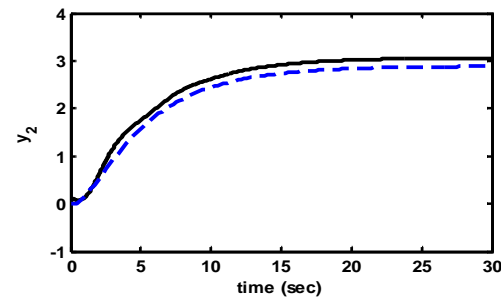
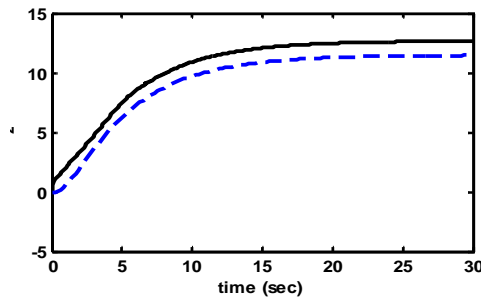
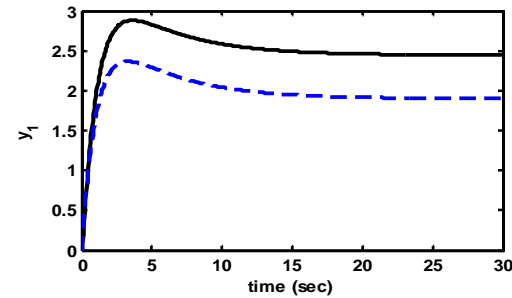
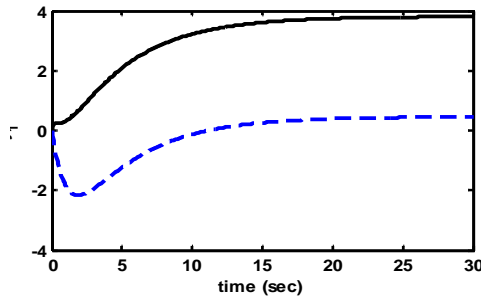
توجه کنید که در مدل مرتبه کاهش یافته با روش بُرش مدال، قطب‌های سیستم مرتبه کاهش یافته تعدادی از قطب‌های سیستم اصلی هستند.

# ■ مثال: توربین گازی $2 \times 2$ با ۱۲ متغیر حالت

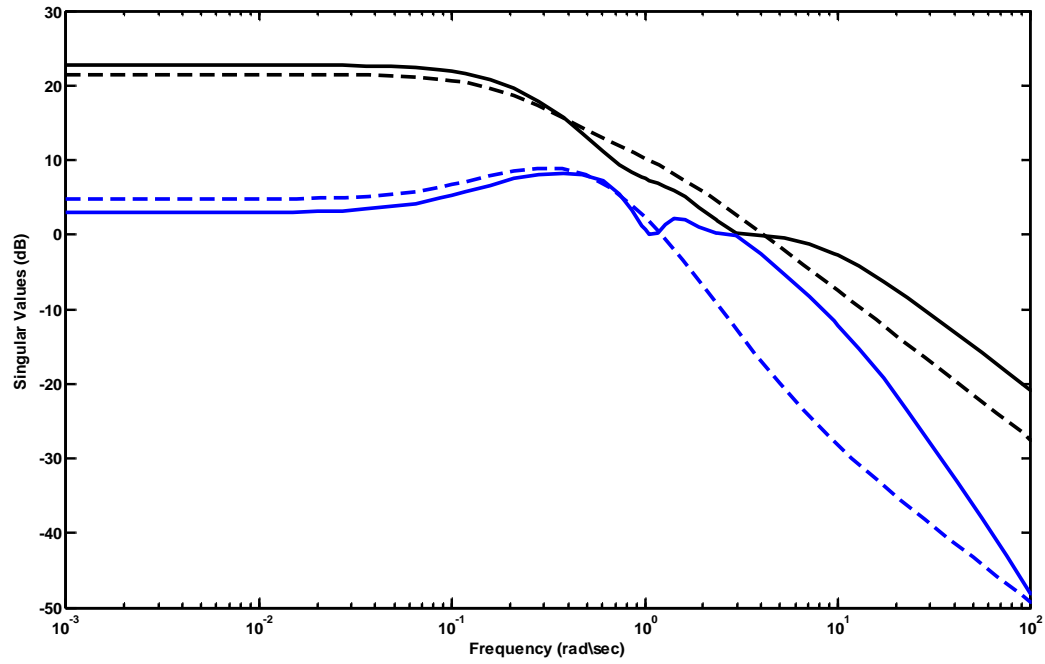
جدول ۴-۴ مقادیر استثنایی هانکل

۱) $7/1833e+0$	۵) $4/6331e-1$	۹) $5/6596e-4$
۲) $1/4904e+0$	۶) $2/3683e-1$	۱۰) $2/0608e-5$
۳) $9/2790e-1$	۷) $1/6132e-1$	۱۱) $1/4124e-6$
۴) $5/8755e-1$	۸) $9/3582e-2$	۱۲) $3/3342e-8$

## ■ پاسخ های خروجی:



## ■ مقادیر استثنایی:



## ▪ روش مانده گذاری

یک دسته متغیر از دسته متغیرهای حالت دیگر سریع ترند.

$$\dot{\mathbf{x}} = A_{r1} \mathbf{x}_1(t) + A_{r2} \mathbf{x}_2(t) + B_r \mathbf{u}(t)$$

که با فرض  $A_{r2} \neq 0$  و حل معادله برای  $\mathbf{x}_2(t)$ ، معادلات سیستم به صورت زیر کاهش می‌یابند

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \left( A_{11} - A_{12} A_{r2}^{-1} A_{r1} \right) \mathbf{x}_1(t) + \left( B_1 - A_{12} A_{r2}^{-1} B_r \right) \mathbf{u}(t) \quad (22-5-4)$$

$$\mathbf{y}(t) = \left( C_1 - C_r A_{r2}^{-1} A_{r1} \right) \mathbf{x}_1(t) + \left( D - C_r A_{r2}^{-1} B_r \right) \mathbf{u}(t) \quad (23-5-4)$$

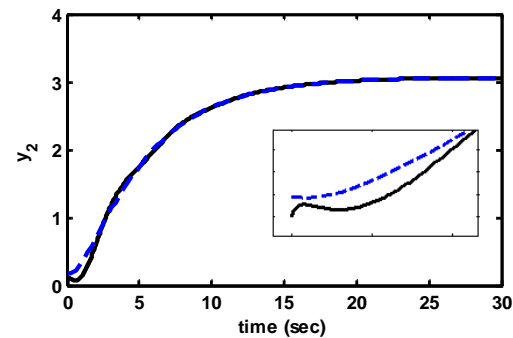
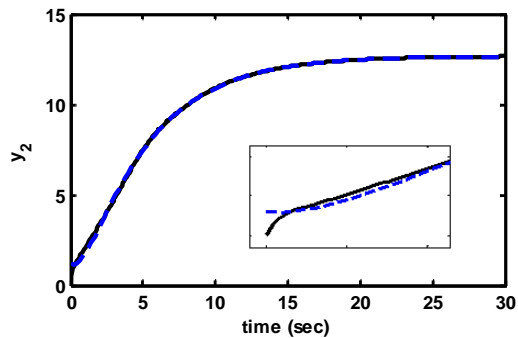
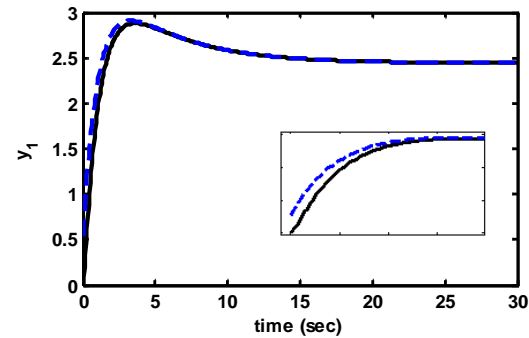
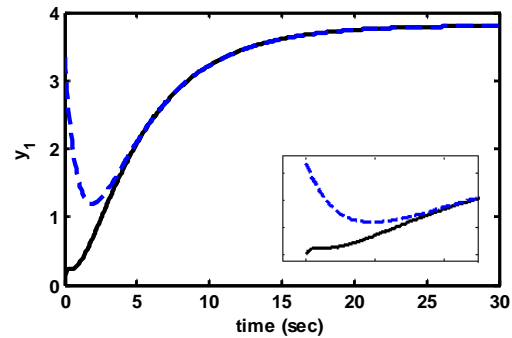
ماتریس تابع تبدیل سیستم کاهش یافته در حالت ماندگار عبارت است از

$$G_r(0) = - \left( C_1 - C_r A_{r2}^{-1} A_{r1} \right) \left( A_{11} - A_{12} A_{r2}^{-1} A_{r1} \right)^{-1} \left( B_1 - A_{12} A_{r2}^{-1} B_r \right) + D - C_r A_{r2}^{-1} B_r$$

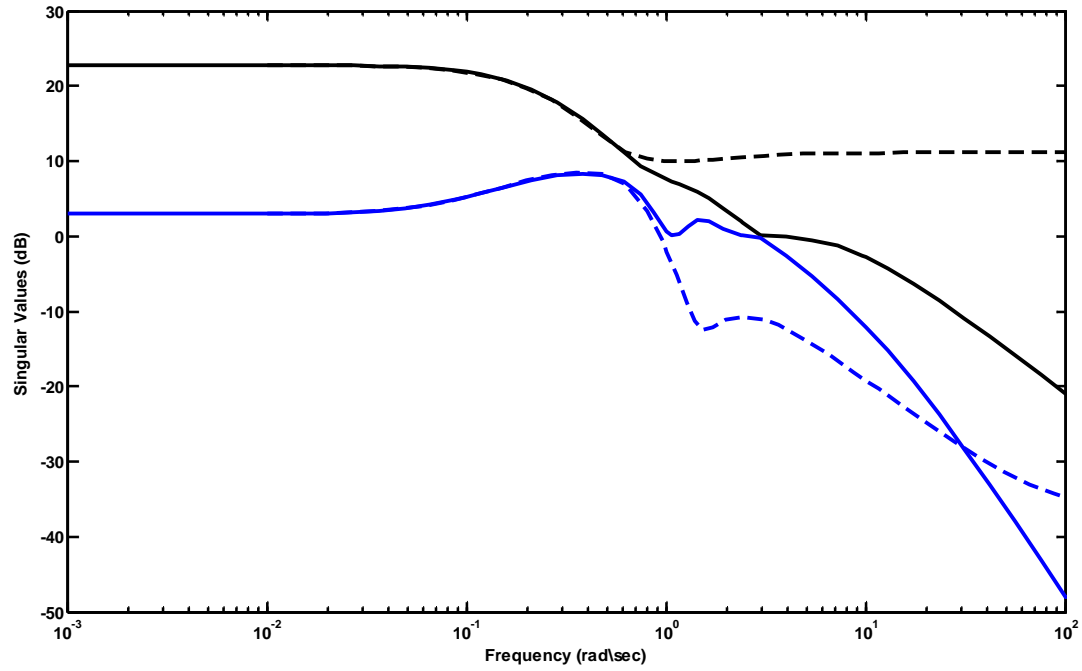
داریم که

$$G_r(0) = G(0)$$

■ مثال: توربین گازی  $2 \times 2$  با ۱۲ متغیر حالت و کاهش مرتبه به روش مانده گذاری. پاسخ های خروجی:



## ■ مقادیر استثنایی:



■ انتخاب مرتبه مدل دینامیکی

تحقق های بالانس شده

■ گرامیان های کنترل پذیری و رویت پذیری:

$$P = \int_0^{\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt$$

$$Q = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

می توان نشان داد که این گرامیان ها معادلات لیاپانوف زیر را برآورده می سازند

$$AP + PA^T + BB^T = 0 \quad (۲۶-۵-۴)$$

$$A^T Q + QA + C^T C = 0 \quad (۲۷-۵-۴)$$

در واقع تحقیقی را بالانس شده گویند که گرامیان های کنترل پذیری و رویت پذیری آن قطری و مساوی باشند. به عبارت دیگر،

$$P = Q = \Sigma = \text{diag}\{\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \dots \quad \sigma_n\} \quad (۲۸-۵-۴)$$

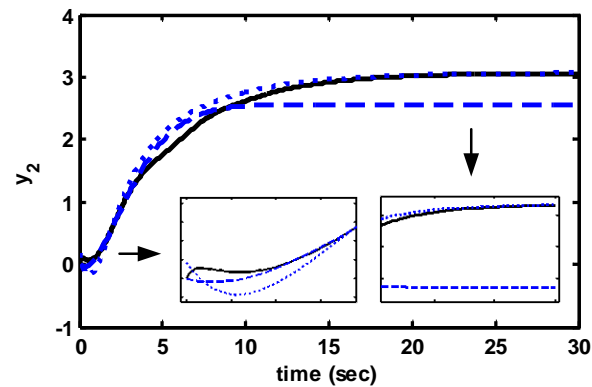
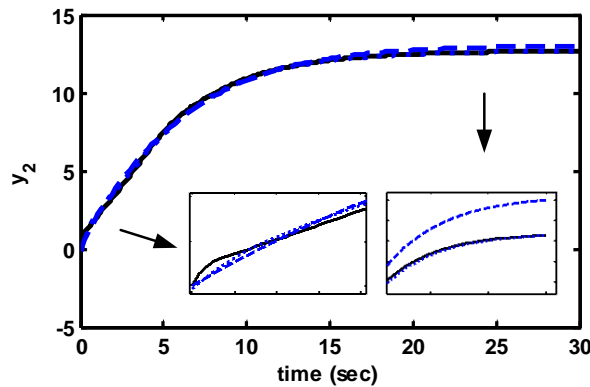
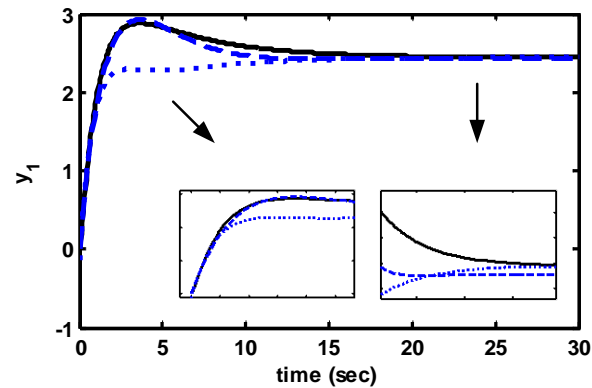
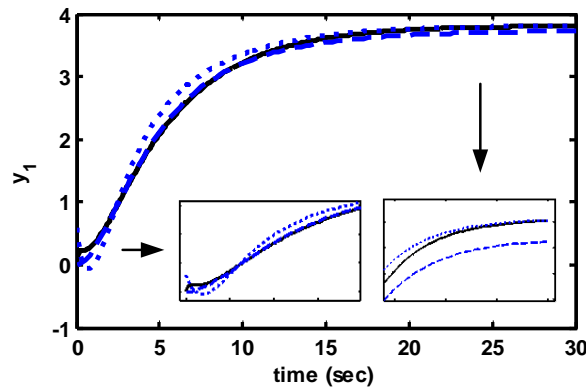
که در آن  $\sigma_i \geq \sigma_{i+1}$  برای  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . تحقیق های پایدار می نیمال را می توان با تبدیل های همانندی مناسب به صورت بالانس شده تبدیل کرد که یک روش آن در ادامه خواهد آمد.



- برش بالانس شده
- مانده گذاری بالانس شده

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \circ \\ \circ & \Sigma_r \end{bmatrix} \Rightarrow \|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq \gamma \left( \sigma_{k+1} + \dots + \sigma_n \right) = \gamma \operatorname{tr} \left( \Sigma_r \right)$$

■ مثال: توربین گازی  $2 \times 2$  با ۱۲ متغیر حالت و کاهش مرتبه به روش برش و مانده گذاری بالانس شده. پاسخ های خروجی:



## ■ مقادیر استثنایی:

