

پایداری و محدودیت های عملکردی در سیستم های چندمتغیره

علی خاکی صدیق
گروه کنترل - آبان ۱۳۹۹

● مقدمه

- مفاهیم پایه و مروری بر تعاریف
- تحلیل پایداری نامی سیستم های چند متغیره
- محدودیت های عملکردی در سیستم های چندمتغیره

• تعاریف پایداری

معادله فضای حالت سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد منفی و ورودی مرجع صفر، عبارت است از

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_c \mathbf{x}(t) \quad (1-2-5)$$

که در آن A_c ماتریس سیستم حلقه بسته است.

تعریف ۱-۵ مبداء سیستم (۱-۲-۵) را پایدار^۱ یا پایدار به مفهوم لیاپانوف^۲ گویند اگر با انحراف سیستم از مبداء، کلیه حرکت‌های بعدی آن در یک همسایگی کوچک از مبداء باقی بمانند.

تعریف ۲-۵ مبداء سیستم (۱-۲-۵) را پایدار مجانبی^۳ گویند اگر با انحراف اندک سیستم از مبداء، کلیه حرکت‌های بعدی آن به مبداء برگشت کنند.

تعریف ۳-۵ مبداء سیستم (۱-۲-۵) را پایدار مجانبی فراگیر^۴ گویند اگر پایدار است و هر حرکتی از آن به ازاء $t \rightarrow \infty$ به مبداء همگرا باشد.

- شرایط پایداری های بالا در نمایش فضای حالت سیستم های خودگردان یا بدون ورودی:

قضیه ۱-۵ مبداء فضای حالت سیستم داده شده با معادله (۱-۲-۵) پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر کلیه ی مقادیر ویژه ماتریس A_c قسمت های حقیقی منفی داشته باشند.

قضیه ۲-۵ مبداء فضای حالت سیستم داده شده با معادله (۱-۲-۵) پایدار است اگر و فقط اگر ماتریس A_c مقدار ویژه ای با قسمت های حقیقی مثبت نداشته باشد و اگر مقادیر ویژه با قسمت های حقیقی صفر متناظر با بلوک های جردن مرتبه ی ۱ باشند.

■ تعریف پایداری ورودی-خروجی سیستم

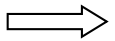
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times m}, C \in R^{m \times n}$$

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

$$u(t) = Ke(t)$$



$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c r(t)$$

$$y(t) = C_c x(t) + D_c r(t)$$

$$A_c = A - B(K^{-1}I_m + D)^{-1}C, B_c = BK - B(K^{-1}I_m + D)^{-1}DK$$

$$C_c = (I_m + DK)^{-1}C, D_c = (I_m + DK)^{-1}DK$$

پاسخ سیستم حلقه بسته:

$$x(t; x(t_0), t_0) = \exp(A_c t) x(t_0) + \int_{t_0}^t \exp[A_c(t - \tau)] B_c r(\tau) d\tau$$

اگر سیستم حلقه بسته پایدار مجانبی باشد:

$$\|\exp(A_c t)\| \leq p \exp(-at), \quad a, p \in R^+, \forall t \geq 0$$

از طرف دیگر:

$$\|y(t)\| \leq \|C_c x(t)\| + \|D_c r(t)\|$$

$$\leq \|D_c r(t)\| + \|C_c \exp(A_c t) x(t_0)\| + \|C_c\| \int_{t_0}^t \|\exp[A_c(t - \tau)]\| \|B_c r(\tau)\| d\tau$$

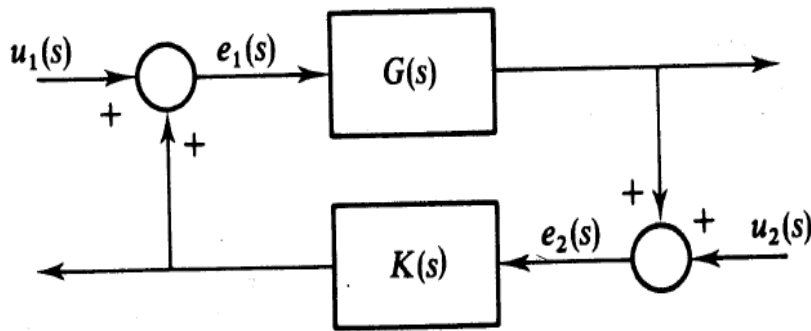
$$\leq dM + cp \|x(t_0)\| + cbMp / a$$

قضیه اگر مبدا فضای حالت سیستم پایدار مجانبی باشد، سیستم پایدار ورودی-خروجی است.

نکته کنترل پذیری و رویت پذیری نمایش فضای حالت.
نکته چند جمله ای مشخصه و چند جمله ای قطب.

■ **تعریف** پایداری نمایی Exponential Stability

■ **تعریف** پایداری داخلی Internal Stability



$$\begin{bmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$



شرط لازم وکافی پایداری داخلی
= پایداری نمایی ماتریس تابع تبدیل

توجه کنید که:

$$H_{11}(s) = [I - K(s)G(s)]^{-1}$$

$$H_{12}(s) = [I - K(s)G(s)]^{-1} K(s)$$

$$H_{21}(s) = [I - G(s)K(s)]^{-1} G(s)$$

$$H_{22}(s) = [I - G(s)K(s)]^{-1}$$

و هم چنین:

$$H_{11}(s) = I + K(s)H_{21}(s)$$

$$H_{12}(s) = H_{11}(s)K(s)$$

$$H_{22}(s) = I + H_{21}(s)K(s)$$

قضيه

If $K(s)$ is exponentially stable, then the feedback system is internally stable $\Leftrightarrow H_{21}(s)$ is exponentially stable.

قضيه

If $K(s)$ is exponentially stable, then $H_{21}(s)$ is exponentially stable \Leftrightarrow

1. $\det[I - G(s)K(s)]$ has no zeros in CRHP.

2. $[I - G(s)K(s)]^{-1}G(s)$ is analytic at every CRHP pole of $G(s)$.

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s-1} \\ \frac{-1}{s+1} & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix} \quad K(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{s-1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G(s)K(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{-1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow \det[I - G(s)K(s)] = \det \begin{bmatrix} \frac{s}{s+1} & \frac{-1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{s}{s+1} \end{bmatrix} = \frac{s^2 + 1}{(s+1)^2}, \text{ But}$$

$$(I - G(s)K(s))^{-1} G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{(s+1)^2} & \frac{s+1}{s^2-1} \\ \frac{-1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

مثال ۵-۱ ماتریس‌های تابع تبدیل و جبران‌ساز زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{1}{s-1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \end{bmatrix}, \quad K(s) = \begin{bmatrix} \frac{-2(s-1)}{s+1} & 1 \\ \frac{s-1}{s+1} & -1 \end{bmatrix}$$

تابع تبدیل حلقه باز سیستم قطب ناپایداری در -1 دارد، برای پایداری داخلی سیستم از قضیه ۵-۵ داریم

$$\det[I - G(s)K(s)] = \frac{(s+2)^2}{(s+1)^2}$$

که قسمت اول آن را برآورد می‌سازد. اما

$$[I - G(s)K(s)]^{-1}G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{(s+2)(s-1)} & \frac{s+1}{(s+2)(s-1)} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

که در قطب ناپایدار -1 تحلیلی نیست و لذا سیستم حلقه بسته پایداری داخلی ندارد.

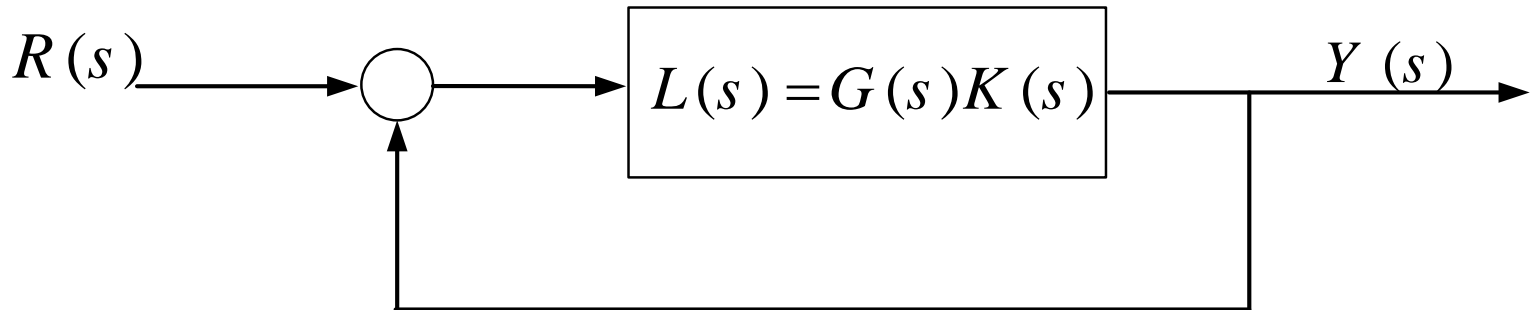


چند نکته:

- فیدبک مثبت و منفی
- معیار پایداری نایکوئیست
- طراحی و ضرورت اجتناب از حذف قطب-صفر ناپایدار
- طراحی با حذف قطب-صفر پایدار

● معیار پایداری نایکوئیست تعمیم یافته

- تعمیم ایده ها از سیستم های SISO به MIMO
- تحلیل پایداری حلقه بسته از اطلاعات حلقه باز
- تحلیل پایداری نایکوئیست
- شمای کلی:



- ایده و کاربرد کلیدی نایکوئیست SISO
- فرض پایداری داخلی
- اصل آرگومان:

Let $f(s)$ be a rational function and C a closed contour in the complex plane. Then, assuming:

1. $f(s)$ is analytic along C , i.e $f(s)$ has no poles on C .
2. $f(s)$ has Z zeros inside C .
3. $f(s)$ has P poles inside C .

Then, "The image of $f(s)$ as s traverses C once in cw direction will make $Z - P$ cw encirclements of the origin.

اکنون ماتریس تابع تبدیل گویای مربعی $kG(s)$ را در نظر بگیرید. همان طور که در شکل ۳-۵ نشان داده شده است، $G(s)$ ، تابع تبدیل حلقه باز سیستم با فیدبک منفی واحد است. با فرض عدم حذف قطب و صفر نیمه راست صفحه در $G(s)$ پایداری حلقه بسته سیستم از قسمت اول قضیه ۵-۵ نتیجه می شود. این قضیه بیان می دارد که $\det[I + kG(s)]$ نباید صفری در نیمه راست صفحه داشته باشد.

فرض کنید که $\det[I + kG(s)]$ ، P_c قطب و P_z صفر در نیمه راست صفحه‌ی s داشته باشد، در این صورت، همانند سیستم‌های یک ورودی و یک خروجی از اصل آرگومان به ازاء حرکت s روی مسیر نایکوئیست، داریم

$$\Delta \arg \det[I + kG(s)] = -2\pi(P_c - P_z) \quad (9-2-5)$$

توجه کنید که اگر قطبی روی مسیر نایکوئیست باشد، لازم است تا با اصلاح مسیر نایکوئیست توسط نیم دایره‌ای با شعاع بسیار کوچک در داخل نیمه‌ی راست صفحه، آن را دور بزنیم.

برای پایداری حلقه بسته باید $P_c = 0$ باشد، زیرا P_c تعداد قطب‌های حلقه بسته در نیمه راست صفحه است. در این حالت معادله (۹-۲-۵) بیان می دارد که شرط پایداری حلقه بسته آن است که تصویر $\det[I + kG(s)]$ به ازاء حرکت s حول مسیر نایکوئیست، P_c بار مبداء را در جهت خلاف عقربه‌های ساعت دور بزند. توجه کنید که تصویر $\det[I + kG(s)]$ به ازاء حرکت s حول مسیر نایکوئیست، همان نمودار نایکوئیست $\det[I + kG(s)]$ است که با روش‌های شناخته شده رسم می شود.

مثال ۲-۵ ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$kG(s) = \frac{k}{s+1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

داریم

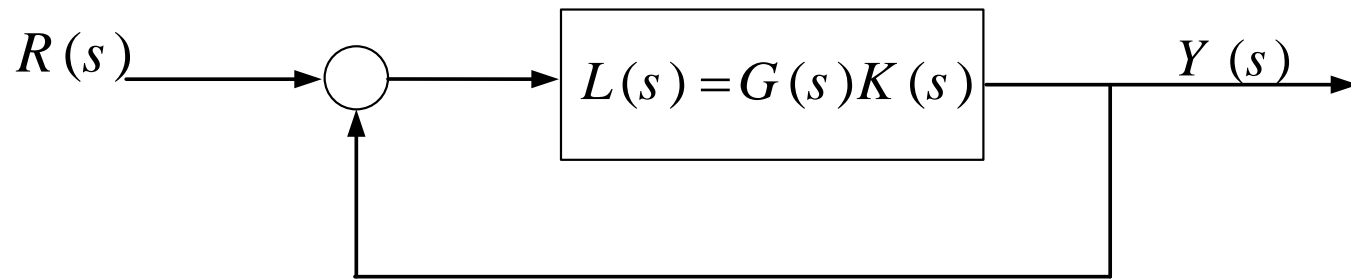
$$\det[I + kG(s)] = \frac{s^2 + (2 + 2k)s + k^2 + 2k + 1}{(s+1)^2}$$

معادله مشخصه حلقه بسته $s^2 + (2 + 2k)s + k^2 + 2k + 1 = 0$ است و برای یک k داده شده می‌توان آن را حل کرده یا نمودار نایکوئیست $\det[I + kG(s)]$ را رسم نمود. اما توجه کنید که k به صورت غیر خطی در صورت تابع کسری ظاهر شده است و لذا نمی‌توان از یک مقدار k استنتاجی برای مقادیر دیگر k داشت. این مشکل امتیاز اصلی کاربرد نمودارهای نایکوئیست در سیستم‌های چندمتغیره را زیر سؤال می‌برد.



جمع بندی: (قضیه پایداری نایکوئیست چند متغیره (تعمیم یافته))

سیستم حلقه بسته زیر با فیدبک منفی، پایدار است اگر و فقط اگر



The Nyquist plot of $F(s)$ makes P anti-cw encirclements of the origin and does not pass the origin. P is the number of open-loop poles in the RHP.

اکنون بهره حلقه را به این صورت فرض کنید:

$$L(s) = kG(s)$$

- حالت نایکوئیست SISO

- روند تعمیم به حالت ماتریسی: نایکوئیست MIMO

$\lambda_i(s)$ an eigenvalue of $G(s) \Rightarrow$

$k \lambda_i(s)$ an eigenvalue of $kG(s)$

$\Rightarrow 1 + k \lambda_i(s)$ is an eigenvalue of $I + kG(s)$

$$\Rightarrow \det [I + kG(s)] = \prod_i [1 + k \lambda_i(s)]$$

بنابراین می توان پایداری را با شمارش تعداد دور زدن های ۱- توسط توابع اسکالر زیر تعیین کرد:

$$k \lambda_i (s)$$

این گراف ها را مکان های مشخصه سیستم Characteristic Loci می نامند.

این گراف ها یا مکان های مشخصه سیستم اغلب غیرگویا هستند. ولذا با مشکل تعداد دور زدن ها حول نقطه ۱- روبرو می شویم.

تعداد این گراف ها یا مکان های مشخصه برای ماتریس تابع تبدیل $m \times m$ برابر m است.

مثال •

$$G_1(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{s-1}{s+1} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2}(s) = \pm \sqrt{\frac{s-1}{s+1}}$$

$$G_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{s+1}{s} \\ \frac{s}{s+4} & \frac{2}{s+4} \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1(s) = 1, \lambda_2(s) = -\frac{s(s+3)}{s^2+6s+8}$$

چند نتیجه مهم بدون اثبات:

مکان های مشخصه توابع پیوسته ای از فرکانس هستند که حداکثر در تعداد محدودی از فرکانس با هم برخورد دارند.

اگر این گراف ها یا مکان های مشخصه را با هم رسم کنیم، یک یا چند منحنی مجزا به دست خواهد آمد.

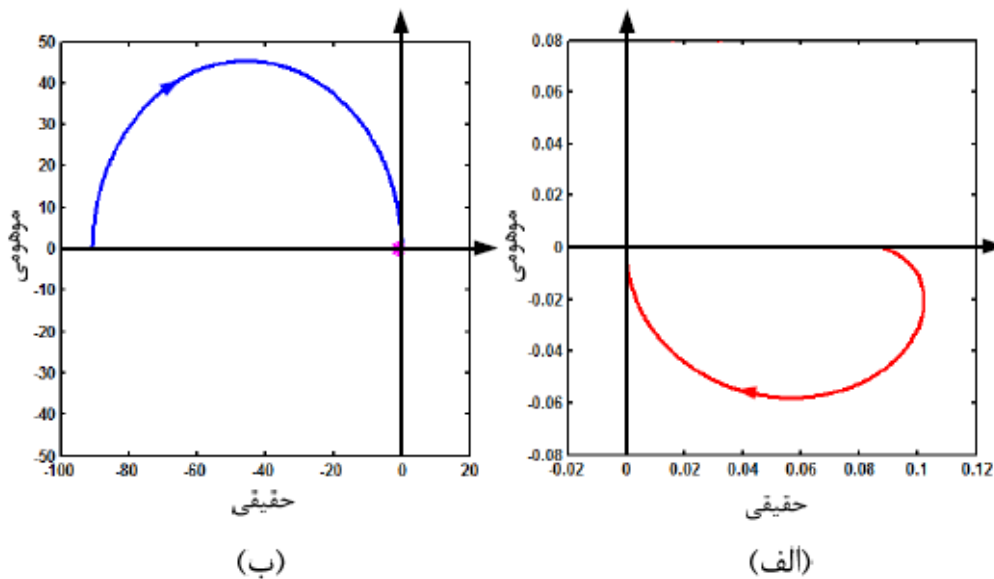
تعداد چرخش های حول مبدا این منحنی ها بدون ابهام امکان پذیر است.

مثال ۴-۵ ماتریس تابع تبدیل یک سیستم فیزیکی در دستگاه ساخت کاغذ در [4] به صورت زیر داده شده است

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{0/03362}{s + 0/3949} & \frac{1/03s}{\alpha(s)} \\ \frac{9/66 \times 10^{-4} s + 1/17 \times 10^{-5}}{\alpha(s)} & \frac{-0/01141}{\alpha(s)} \end{bmatrix}$$

که در آن

$$\alpha(s) = s^2 + 0/395s + 1/26 \times 10^{-4}$$



شکل ۶-۵ مکان‌های مقدار ویژه‌ی $G(s)$ در مثال ۴-۵

تعریف دیاگرام نایکوئیست تعمیم یافته ماتریس تابع تبدیل $G(s)$ مجموعه مکان هایی است که توسط مکان های مشخصه آن، به ازاء تغییرات s حول مسیر نایکوئیست ایجاد می شود.

قضیه (معیار پایداری نایکوئیست تعمیم یافته) اگر ماتریس تابع تبدیل $G(s)$ تعداد P قطب ناپایدار داشته باشد، سیستم حلقه بسته با نسبت برگشتی $kG(s)$ پایدار است اگر و فقط اگر k دیگرام نایکوئیست تعمیم یافته آن نقطه -1 را P بار در جهت خلاف عقربه ساعت دور بزند. (فرض: سیستم حذف قطب-صفر ناپایدار ندارد).

مثال ۵-۷

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.5(s+1)^2 + 1}{(s+1)^2} & \frac{-0.5(s-1)}{s+1} \\ 1 & 0 \\ \frac{1}{(s-1)(s+1)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

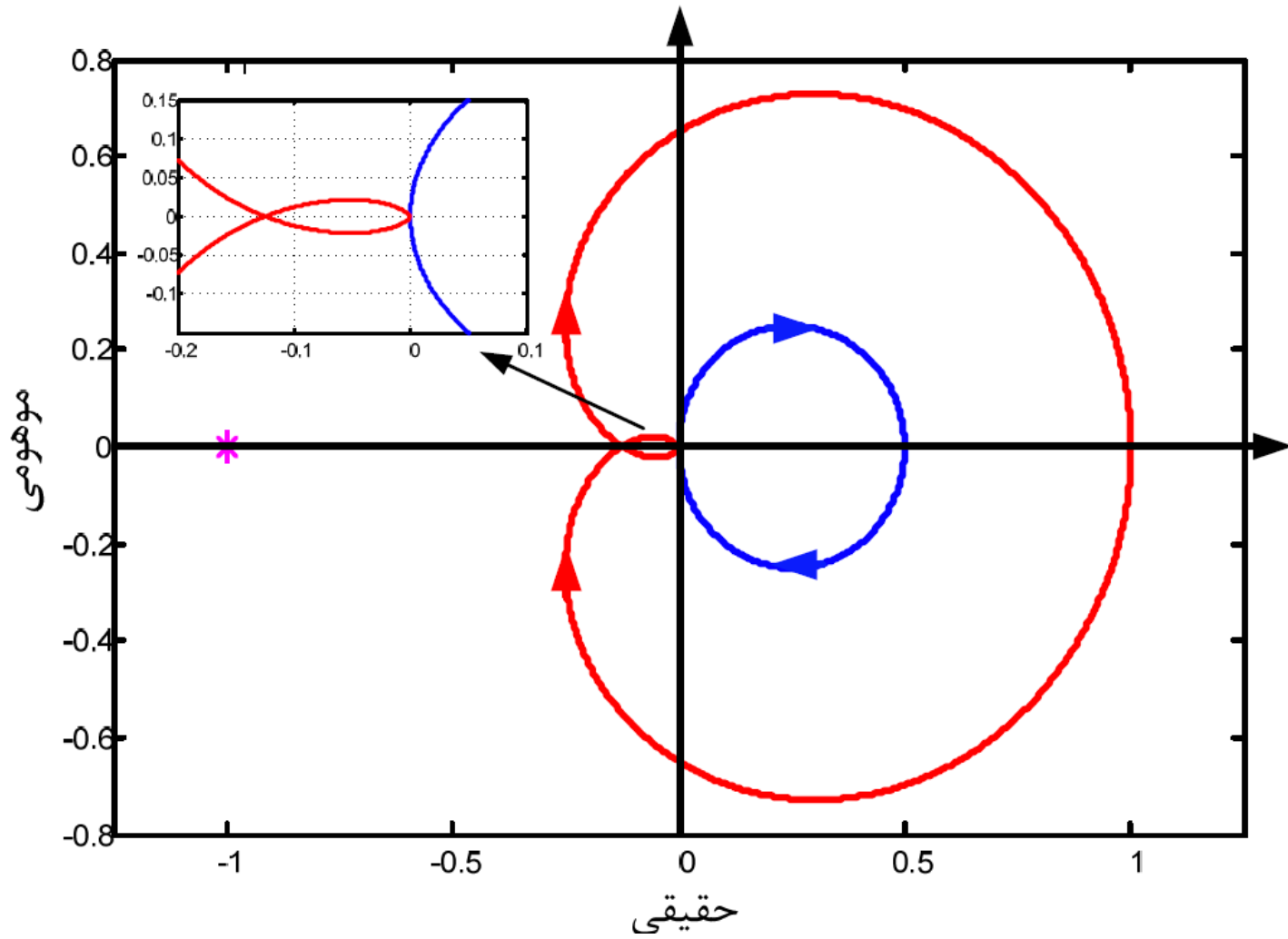
مقادیر ویژه این ماتریس عبارت‌اند از

$$|\lambda(s)I - G(s)| = \left(\lambda(s) - \frac{0.5}{s+1} \right) \left(\lambda(s) - \frac{1}{(s+1)^2} \right) = 0$$

که می‌دهد

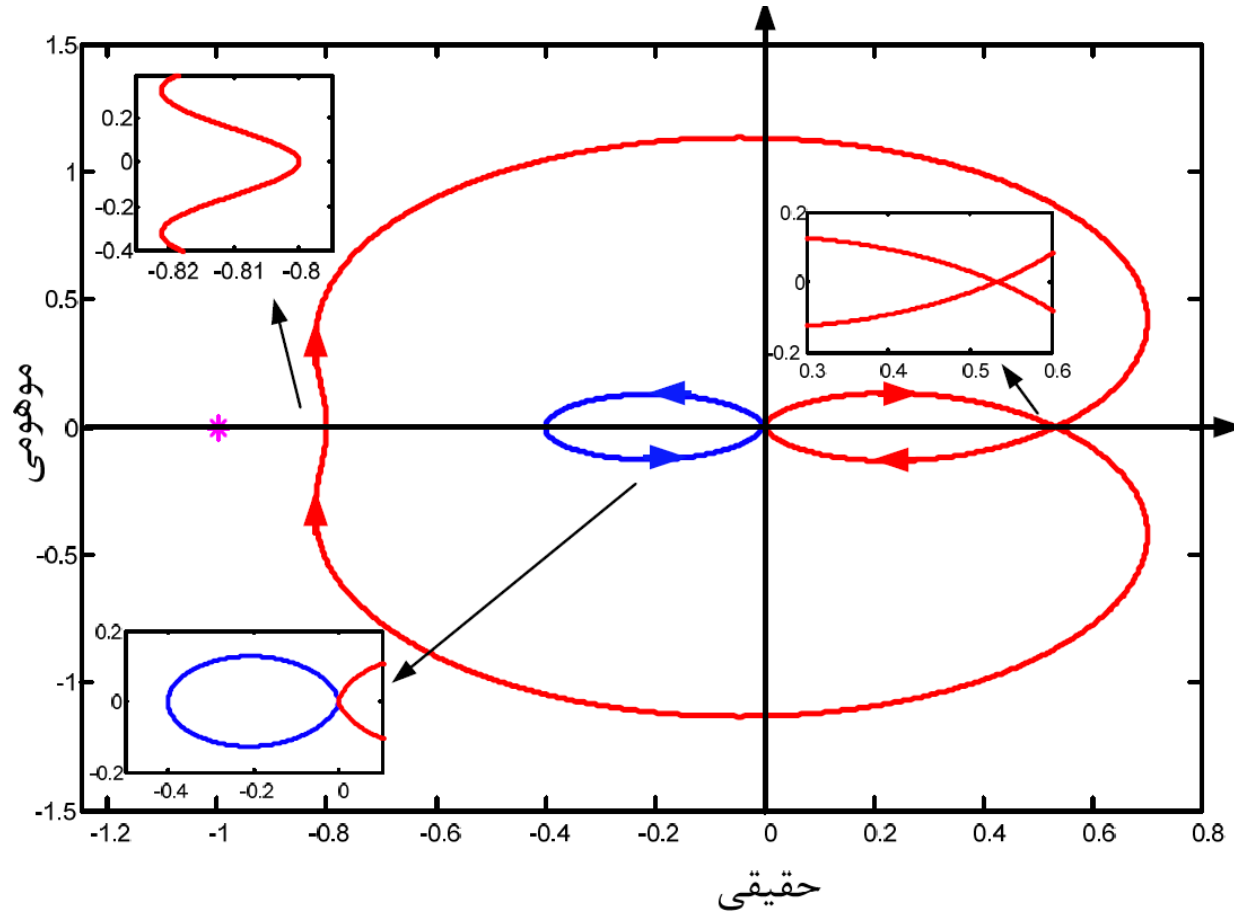
$$\lambda_1(s) = \frac{0.5}{s+1}, \quad \lambda_2(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

در اینجا از آنجا که $\lambda_1(s)$ و $\lambda_2(s)$ هر دو دارای یک قطب در $s = -1$ هستند، بنابراین این سیستم دارای یک قطب در $s = -1$ است.



$$G(s) = \frac{k}{1/25(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s-1 & s \\ -6 & s-2 \end{bmatrix}$$

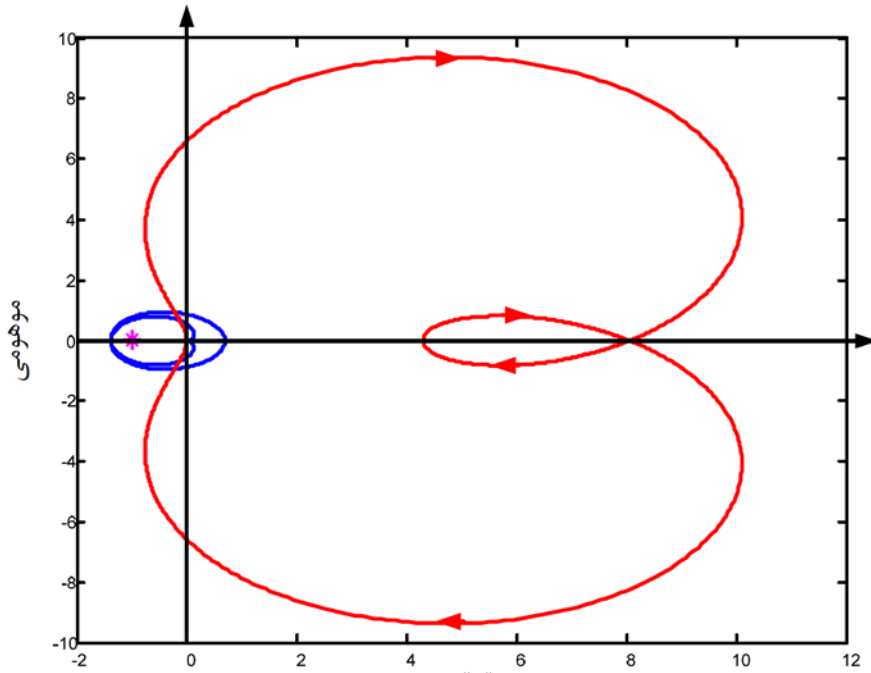
مثال ۵-۸



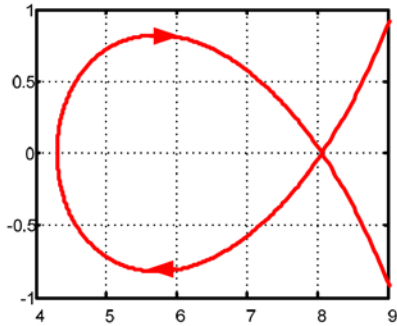
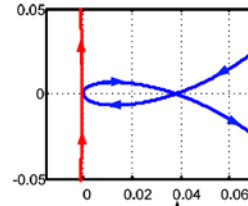
مثال ۵-۹

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + 0.6s + 1} \begin{bmatrix} 0.5(s + 2) & 4(s + 0.1) \\ 0.3(s + 1/3) & 3/2(s + 1/25) \end{bmatrix}$$

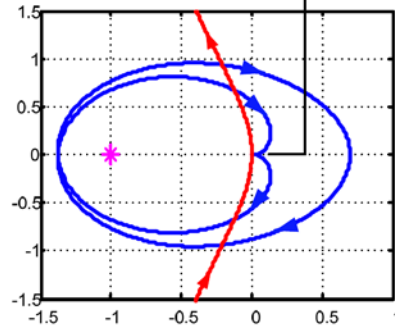
مثال ۵-۹



حقیقی
(الف)



(ج)



(ب)

- معیار پایداری نایکوئیست معکوس چند متغیره (تعمیم یافته)
(Generalized Inverse Nyquist)

قضیه (معیار پایداری نایکوئیست معکوس تعمیم یافته) اگر ماتریس تابع تبدیل $G(s)$ تعداد Z صفر انتقال نیمه راست صفحه داشته باشد، سیستم حلقه بسته با نسبت برگشتی $kG(s)$ پایدار است اگر و فقط اگر دیاگرام نایکوئیست تعمیم یافته $inv(G(s))/k$ نقطه -1 را Z بار در جهت خلاف عقربه ساعت دور بزند. (فرض: سیستم حذف قطب-صفر ناپایدار ندارد).

• محدودیت های عملکرد در سیستم های کنترل چند متغیره

روشهای بررسی محدودیت های عملکرد

■ روشهای حوزه فرکانس

■ روشهای حوزه زمان

محدودیت در حوزه زمان: **کرانه‌های تداخل و صفرهای نیمه راست صفحه**

تعاریف اولیه : مشخصه های پاسخ پله ای

■ زمان استقرار

■ زمان خیز

■ فراجهش

■ فروجهش

■ تداخل

پاسخ پله سیستم نمونه :

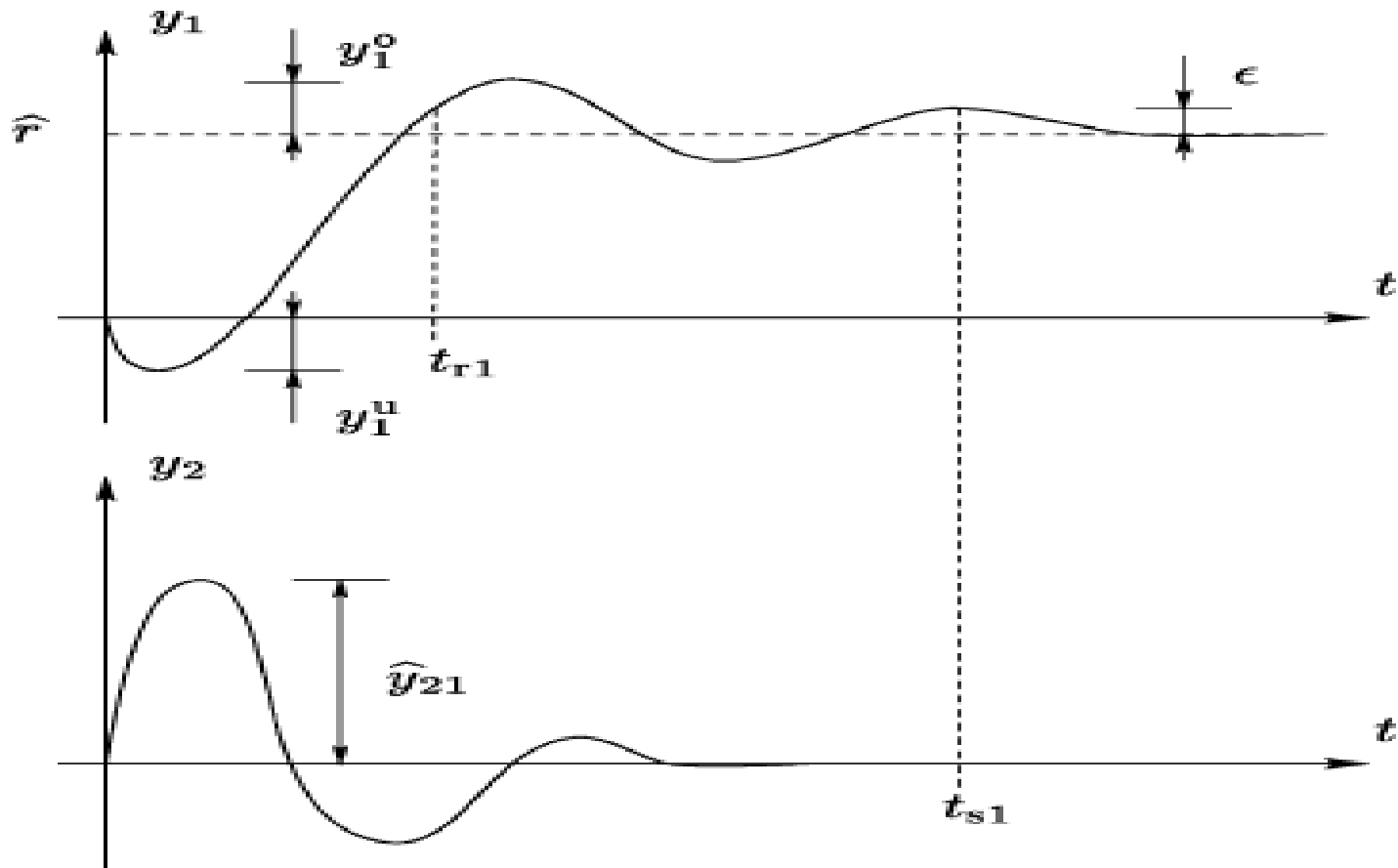


Fig. 1. Definition of settling time t_{s1} , settling level ϵ , rise time t_{r1} , overshoot y_1^o , undershoot y_1^u , and interaction \hat{y}_{21} in a 2×2 system with reference step \hat{r} in r_1 .

تعريف رياضى مشخسه ها :

Definition 2 (Set-point response). For the closed-loop system (1), consider a step in reference signal $i \in \{1, \dots, m\}$, so that $r_i(t) = \hat{r}$ and $r_j(t) = 0$ for all $j \neq i$ and $t > 0$. The settling time $t_{si} \in (0, \infty)$ is defined as

$$t_{si} = \max_{k \in \{1, \dots, m\}} \inf_{\delta > 0} \{ \delta : |y_k(t) - r_k(t)| \leq \varepsilon, t > \delta \},$$

where $\varepsilon \geq 0$ is a predefined settling level. The rise time is

$$t_{ri} = \sup_{\delta > 0} \{ \delta : y_i(t) \leq \hat{r}t/\delta, t \in (0, \delta) \}.$$

The overshoot in output i is denoted $y_i^o \geq 0$ and is defined as

$$y_i^o = \sup_{t > 0} \{ y_i(t) - r_i(t), 0 \}$$

and the undershoot $y_i^u \geq 0$ is defined as

$$y_i^u = \sup_{t > 0} \{ -y_i(t), 0 \}.$$

The interaction from r_i to output $k \neq i$ is denoted $\hat{y}_{ki} \geq 0$ and is defined as

$$\hat{y}_{ki} = \sup_{t > 0} \{ |y_k(t)| \}.$$

■ دو نتیجه مهم در رابطه با تابع حساسیت و تابع مکمل حساسیت $S(s)$ برای سیستم حلقه بسته با تابع تبدیل حلقه باز $G(s)$ و کنترل کننده $C(s)$ در مسیر فیدبک:

$$y_z^H T(z) = 0 \quad \text{and} \quad S(p) y_{p_i} = 0$$

Also,

$$y_z^H \int_0^{\infty} e^{-zt} y(t) dt = y_z^H Y(z) = y_z^H T(z) R(z) = 0$$

■ **صفرهای انتقال در نیمه راست صفحه** و یک قضیه مهم

قضیه سیستم حلقه بسته با شرایط اولیه صفر در $t=0$ با ورودی مرجع پله ای در اولین ورودی \hat{r} و صفر در سایر ورودیها را در نظر بگیرید. سیستم یک صفر حقیقی در نیمه راست صفحه دارد. پاسخ پله سیستم نابرابری زیر را برآورده می کند:

$$y_{z1} y_1^u + \sum_{k=2}^m |y_{zk}| \hat{y}_{k1} \geq \frac{1}{e^{zts1} - 1} \left[y_{z1} (\hat{r} - \varepsilon) - \varepsilon \sum_{k=2}^m |y_{zk}| \right]$$

که در آن y_{zi} امین مولفه بردار جهت صفر است و اولین مولفه آن مثبت فرض شده است.

● دو نتیجه مهم:

■ برای سطح استقرار کوچک تقریباً داریم

$$y_{z1} y_1^u + \sum_{k=2}^m |y_{zk}| \hat{y}_{k1} \geq \frac{\hat{y}_{z1}}{e^{zts1} - 1}$$

که یک کران پایین بر فروجهش پاسخ است و نشان می دهد که برای صفرهای نزدیک مبدا مقدار آن بزرگ است. همچنین اگر تداخل کم باشد فروجهش بزرگ خواهد بود. **مصالحه بین فروجهش در ردیابی و تداخل در سایر حلقه ها.**

■ در سیستم SISO یک صفر در نیمه راست صفحه پاسخ معکوس اولیه ایجاد می کند. قضیه نشان می دهد که در سیستم MIMO این پدیده تنها هنگامی قطعاً رخ می دهد که بردار جهت صفر فقط یک درایه غیر صفر داشته باشد.

■ قطب های ناپایدار و یک قضیه مهم

■ m ورودی مرجع پله ای به سیستم اعمال شده و ماتریس خطای کنترل به صورت زیر تعریف می شود:

$$E = \hat{R} - \hat{Y} = S\hat{R}, \text{ where}$$

$$\hat{R}(s) = \begin{bmatrix} \hat{r}/s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{r}/s & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{r}/s \end{bmatrix}$$

and $\hat{Y} = \text{O/P responses}$,

$$E(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} e(t) dt,$$

$$\Rightarrow E(p) y_{p_i} = S(p) \hat{R}(p) y_{p_i} = S(p) y_{p_i} / p = 0$$

قضیه سیستم حلقه بسته پایدار با شرایط اولیه صفر در $t=0$ با ورودی مرجع پله ای $r_i(t) = \hat{r}$, $t > 0$ در اولین ورودی و صفر در سایر ورودیها را در نظر بگیرید. سیستم یک قطب حقیقی ناپایدار دارد. پاسخ پله سیستم نابرابری زیر را برآورده می کند:

$$y_{p1} y_1^o + \sum_{k=2}^m |y_{pk}| \hat{y}_{1k} \geq \frac{\hat{r} p t_{r1}}{2} y_{p1} - (e^{p t_{r1}} - 1) \sum_{k=2}^m |y_{pk}| \hat{y}_{1k}$$

که در آن y_{pi} امین مولفه بردار جهت قطب است و اولین مولفه آن مثبت فرض شده است.

■ یک نتیجه مهم:

اگر جهت قطب چنان باشد که

$$y_{p1} \gg |y_{pk}|, \quad k = 2, \dots, m$$

آنگاه قطب ناپایدار دور از مبدا لزوماً فراجاهش بزرگی خواهد داد اگر زمان خیز طولانی باشد.

مثال : فرایند چهار مخزنه



• مشخصات سیستم :

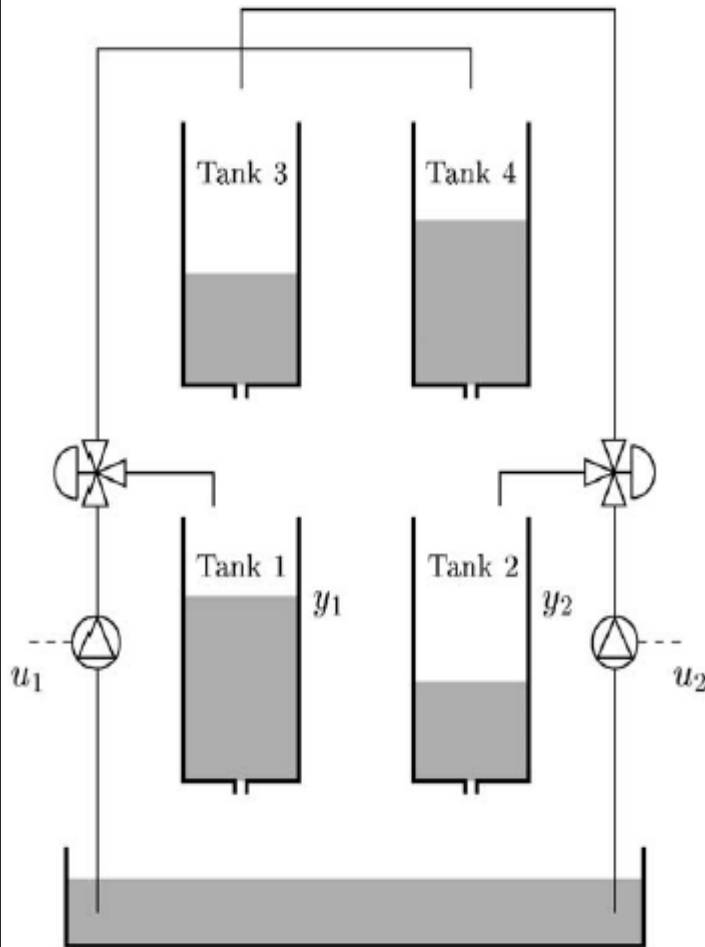
ورودیها ← ولتاژ پمپ ها

خروجیها ← سطوح آب در دو مخزن پایین

✓ دو شیر که از قبل تنظیم می شوند:

$$\gamma_1, \gamma_2 \in [0, 1]$$

✓ جریان ورودی به مخزن ۱ و ۴ به ترتیب با $\gamma_1, 1-\gamma_1$ متناسب است. مخازن ۲ و ۳ مشابه است.



- تحلیل سیستم از خطی سازی:

$\gamma_1 + \gamma_2 \in (12) \rightarrow$ Minimum Phase Plant

$\gamma_1 + \gamma_2 \in (01) \rightarrow$ Non-Minimum Phase Plant

- سیستم در نقاط کار :

the minimum-phase setting $(\gamma_1, \gamma_2) = (0.70, 0.60)$ and the nonminimum-phase setting $(0.43, 0.34)$. System identification experiments give the following two models:

$$G_-(s) = \begin{bmatrix} \frac{3.11}{1+95.57s} & \frac{2.04}{(1+32.05s)(1+95.57s)} \\ \frac{1.71}{(1+38.90s)(1+98.67s)} & \frac{3.24}{1+98.67s} \end{bmatrix}$$

and

$$G_+(s) = \begin{bmatrix} \frac{1.69}{1+76.75s} & \frac{3.33}{(1+52.30s)(1+76.75s)} \\ \frac{3.11}{(1+56.36s)(1+111.55s)} & \frac{1.97}{1+111.55s} \end{bmatrix}.$$

• تحلیل عملکرد سیستم MP:

• تحلیل عملکرد سیستم NMP:

صفر نیمه راست صفحه سیستم در 0.014 قرار دارد و بردار جهت متناظر آن عبارت است از:

$$y_z = [0.64 \ -0.77]^T$$

با سطح استقرار صفر داریم:

$$y_{z1} y_1^u + y_{z2} \hat{y}_{21} \geq \frac{y_{z1}}{e^{z t_{s1}} - 1}$$

$$\Rightarrow y_1^u + 1.20 \hat{y}_{21} \geq \frac{1}{e^{0.014 z t_{s1}} - 1} \Rightarrow y_1^u \geq -1.20 \hat{y}_{21} + .32$$

where, $t_{s1} = 100 \text{sec}$

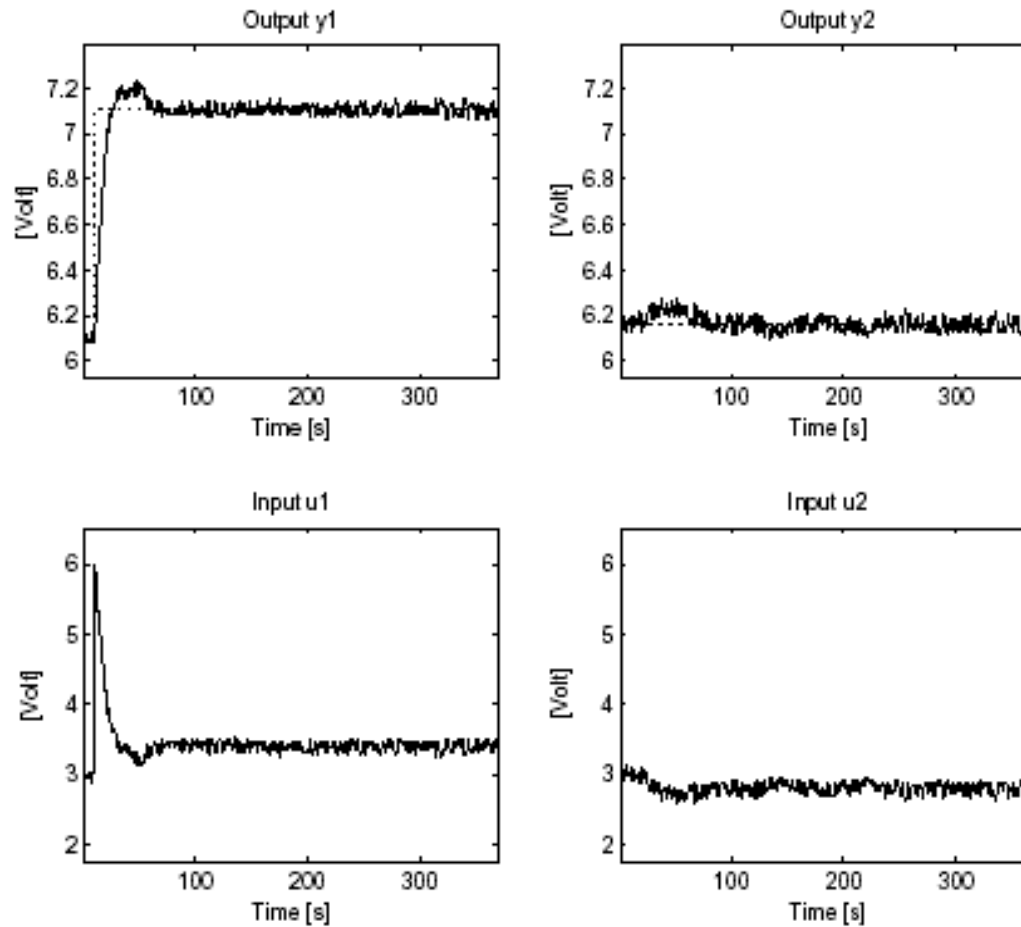


Fig. 4. Responses for decentralized PI control of the quadruple-tank process in minimum-phase setting. The input is a unit reference step in r_1 .

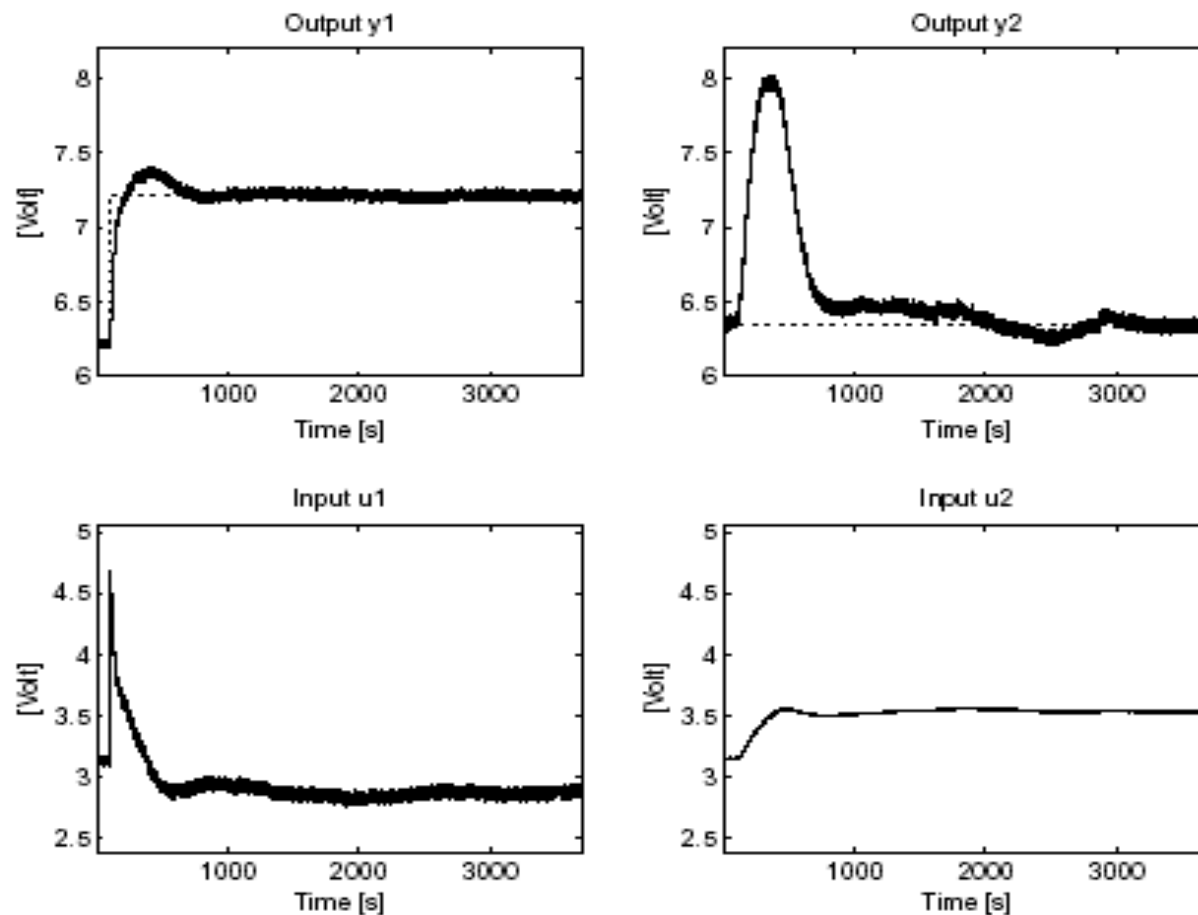
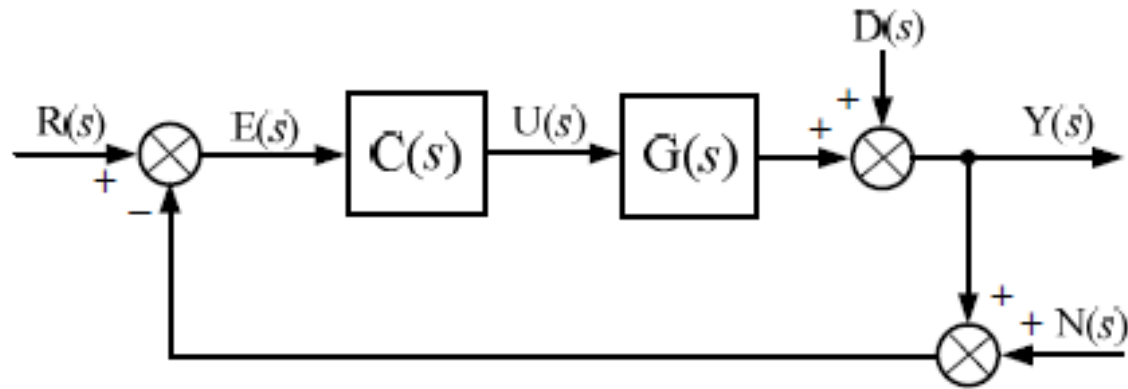


Fig. 5. Responses for decentralized PI control of the quadruple-tank process in minimum-phase setting. The input is a unit reference step in r_1 . Note that the settling time is about 10 times longer than for the minimum-phase setting shown in Fig. 4.

● چند نتیجه گیری مهم:

- جهت های قطب و صفر در سیستم های چند متغیره
- کنترل پذیری و رویت پذیری و جهت های قطب و صفر
- محدودیت های عملکرد در سیستم های چند متغیره بر حسب پارامترهای حوزه زمان
- پدیده فروجهش در سیستم های چند متغیره
- نقش صفرهای انتقال نیمه راست صفحه
- نقش قطب های ناپایدار

• محدودیت های عملکردی در حوزه فرکانس



- تضعیف اغتشاش
- ردیابی ورودی های مرجع
- کاهش اثر نویز اندازه گیری

■ تضعیف اغتشاش

$$Y(s) = (I + G(s)C(s))^{-1} D(s) = S(s)D(s)$$

از معادله‌ی بالا مشاهده می‌شود که $S(s)$ ماتریس تابع تبدیل از اغتشاش به خروجی سیستم است. لذا اگر بخواهیم که اثر اغتشاش را در خروجی تضعیف کنیم با شرط زیر

$$\bar{\sigma}(S(j\omega)) \leq \gamma$$

که در آن γ یک عدد کوچک مثبت است، داریم

$$\|Y(j\omega)\| \leq \gamma \|D(j\omega)\|$$

■ ردیابی ورودی های مرجع

$$R(s) - Y(s) = (1 + G(s)C(s))^{-1} R(s) = S(s)R(s)$$

و لذا با فرض

$$\bar{\sigma}(S(j\omega)) \leq \gamma$$

داریم

$$\|R(j\omega) - Y(j\omega)\| \leq \gamma \|R(j\omega)\|$$

که با کوچک تر کردن γ هدف کنترلی برآورد می گردد.

■ کاهش اثر نویز اندازه گیری

$$Y(s) = G(s)C(s)(I + G(s)C(s))^{-1}N(s) = G(s)C(s)S(s)N(s)$$

و لذا با فرض

$$\bar{\sigma}(G(j\omega)C(j\omega)S(j\omega)) \leq \gamma$$

داریم

$$\|Y(j\omega)\| \leq \gamma\|N(j\omega)\|$$

که نشان می‌دهد γ اثر مستقیم بر مقدار تأثیر نویز بر خروجی دارد. بدیهی است که γ های کوچک‌تر مطلوب‌تر هستند.

■ ماتریس تابع حساسیت مکمل

اکنون توجه کنید که

$$S(s) + G(s)C(s)S(s) = I \quad (7-3-5)$$

این معادله یک رابطه‌ی جبری است که برقراری آن الزامی است و یک محدودیت کلیدی طراحی به شمار می‌رود. ماتریس $G(s)C(s)S(s)$ را ماتریس تابع حساسیت مکمل^۱ می‌نامند. هم‌چنین، داریم

$$G(s)C(s)S(s) = G(s)C(s)(I + G(s)C(s))^{-1} = (I + G(s)C(s))^{-1}G(s)C(s)$$

که همان ماتریس تابع تبدیل حلقه بسته‌ی سیستم است.

همان‌طور که از ملزومات به دست آمده مشخص است، مطلوب است که $\bar{\sigma}(S(j\omega))$ و $\bar{\sigma}(G(j\omega)C(j\omega)S(j\omega))$ را کوچک کنیم. لیکن کوچک کردن هر دوی این کمیت‌ها با توجه به رابطه‌ی (7-3-5) در همه‌ی فرکانس‌ها ممکن نیست. لذا تلاش می‌کنیم که برای یک ناحیه‌ی فرکانسی مانند $[\omega_a, \infty)$ ، $\bar{\sigma}(S(j\omega))$ را کوچک کنیم و برای (ω_a, ∞) ، $\bar{\sigma}(G(j\omega)C(j\omega)S(j\omega))$ را کوچک کنیم. بدین صورت، عملکردی بالا در $[\omega_a, \infty)$ خواهیم داشت و پایداری حلقه بسته نیز تضمین شده خواهد بود. اما مشاهده خواهیم کرد که تغییر سریع در نزدیکی فرکانسی مانند ω_a امکان‌پذیر نیست، که یکی از محدودیت‌های جدی عملکرد است.

■ رابطه بهره فاز بودی برای سیستم های SISO

■ حالت MIMO

قضیه ۵-۱۰ ماتریس تابع تبدیل حلقه باز $m \times m$ $G(s)C(s)$ را با درجه‌ی نسبی حداقل ۲ برای هر کدام از درآیه‌ها در نظر بگیرید. اگر $S(s)$ پایدار باشد، آن‌گاه

$$\int_0^{\infty} \log |\det(S(j\omega))| d\omega = \pi \sum_i \text{Re}(p_i) \quad (۹-۳-۵)$$

$$\sum_j \int_0^{\infty} \log \sigma_j(S(j\omega)) d\omega = \pi \sum_i \text{Re}(p_i) \quad -(۱۰-۳-۵)$$

$$\int_0^{\infty} \log \underline{\sigma}(S(j\omega)) d\omega \leq \frac{\pi}{n} \sum_i \text{Re}(p_i) \quad (۱۱-۳-۵)$$

$$\int_0^{\infty} \log \bar{\sigma}(S(j\omega)) d\omega \geq \frac{\pi}{n} \sum_i \text{Re}(p_i) \quad (۱۲-۳-۵)$$

که در آن p_i قطب‌های نیمه راست صفحه $G(s)C(s)$ هستند.

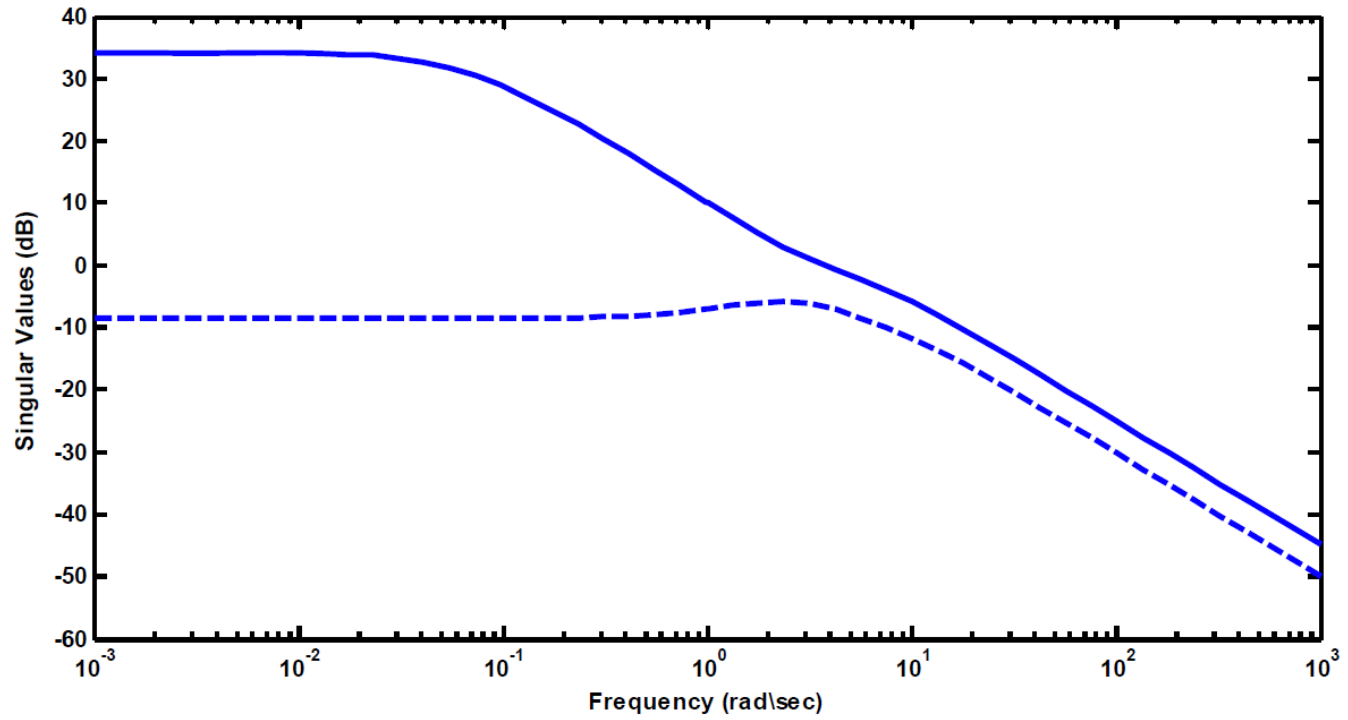
مثال ۵-۱۱ معادلات خطی سازی شده یک راکتور ناپایدار در زیر داده شده است [5]:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1/38 & -0/2077 & 6/715 & -5/676 \\ -0/5814 & -4/29 & 0 & 0/675 \\ 1/067 & 4/273 & -6/654 & 5/893 \\ 0/048 & 4/273 & 1/343 & -2/104 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5/679 & 0 \\ 1/136 & -3/146 \\ 1/136 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

مقادیر ویژه ماتریس A سیستم عبارت‌اند از $8/67$ ، $-5/57$ ، $0/64$ و $1/99$. دو هدف کنترلی در این سیستم پایدارسازی حلقه بسته و بهبود ردیابی ورودی مرجع هستند. برای دستیابی به خطای حالت ماندگار صفر در ردیابی ورودی پله باید داشته باشیم $\bar{\sigma}(S(0)) = 0$ و برای سرعت مناسب در پاسخ حلقه بسته باید $\bar{\sigma}(S(j\omega)) \leq \epsilon$ برای $\omega \in [0, \omega_B]$ باشد، که در آن ϵ به حد کافی کوچک و ω_B به حد کافی بزرگ است. مقادیر استثنایی سیستم جبران نشده در شکل ۵-۱۴ رسم شده است. با توجه به شکل

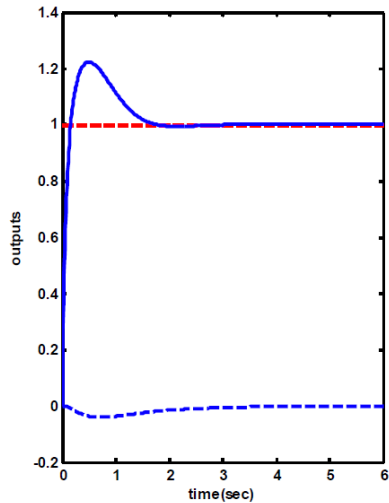
$$\bar{\sigma}(S(j10^{-2})) \geq 10/14 \text{ و } \underline{\sigma}(S(j10^{-2})) \leq 0/4 \text{ داریم}$$



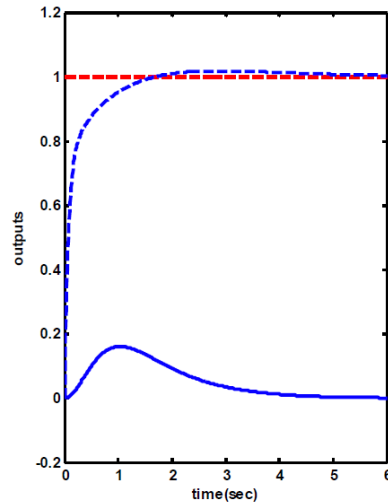
شکل ۵-۱۴ مقادیر استثنایی حلقه باز برای مثال ۵-۱۱

ماتریس‌های ضرایب تناسبی و انتگرالی کنترل کننده PI در [5] برای دستیابی به اهداف عملکردی به صورت زیر طراحی شده است

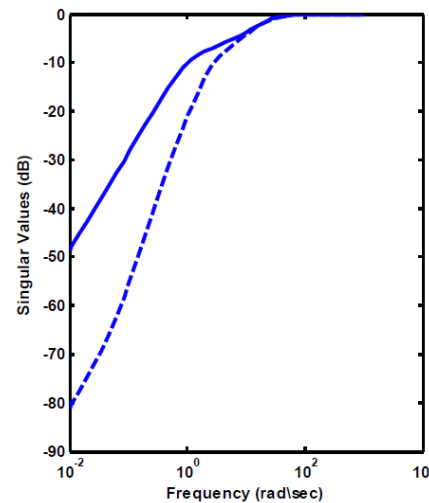
$$K_p = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_i = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$$



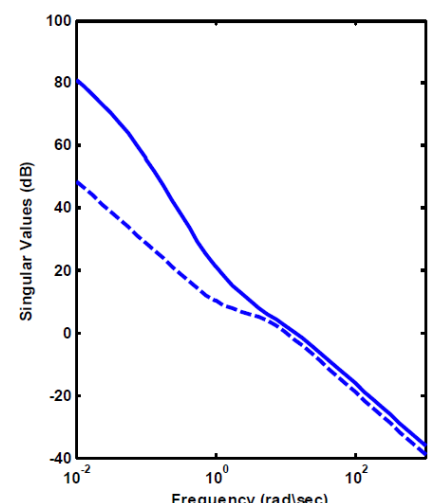
(ب)



(الف)



(ب)



(الف)

شکل ۵-۱۶ پاسخ پله سیستم حلقه بسته در مثال ۵-۱۱ (الف) ورودی $[0 \ 1]^T$ (ب) ورودی $[1 \ 0]^T$ خروجی اول به صورت توپیر و خروجی دوم به صورت خط چین نمایش داده شده است.

شکل ۵-۱۵ مقادیر استثنایی برای مثال ۵-۱۱، (الف) تابع بهره حلقه (ب) تابع حساسیت