مباحث کلاسیک در طراحی سیستم های کنترل چندمتغیره

علی خاکی صدیق

گروه کنترل- آذر ۱۳۹۹

- **مقدمه**

  - طراحی های متمرکز
  - طراحی های غیرمتمرکز

- مراحل اصلی طراحی سیستم های کنترل چندمتغیره:

  - مدل سازی سیستم
  - تحلیل کامل سیستم حلقه باز و فرموله‌سازی اهداف کنترلی
  - انتخاب ساختار کنترلی
  - طراحی کنترل کننده
  - شبیه سازی یا اجرا بر روی دستگاه نمونه ی آزمایشگاهی
  - پیاده سازی

انتخاب ورودی و خروجی

- متغیرهای اندازه گیری شده
- متغیرهای دست کاری شده

مثال. در کنترل دمای درون یک کوره تنها خروجی سیستم دما و سیگنال ورودی کنترل میزان گشودگی شیر سوخت است.
در کنترل دور موتور یک ماشین الکتریکی، دور موتور خروجی و ولتاژ ورودی سیگنال کنترل است.
طراح در انتخاب آزادی عمل دارد: کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری، موقعیت صفرها، پیچیدگی کنترل و مسائل سخت‌افزاری (هزینه و تعمیر و نگه‌داری)

- تعریف مساله

متغیرهای مناسب u را برای دست‌کاری توسط کنترل‌کننده (ورودی‌های دستگاه) و متغیرهای مناسب y را برای ارسال به کنترل‌کننده (خروجی‌های دستگاه) انتخاب کنید.

- هر ترکیب ورودی‌ها و خروجی‌ها: یک مجموعه‌ی IO
- انتخاب ورودی و خروجی در یک سیستم واقعی: تعداد، مکان و نوع مناسب حسگرها و محرک‌ها.
- تحقق فیزیکی و ساخت دستگاه.
- ورودی و خروجی برای دستگاهی که پیش‌تر ساخته شده و سنسورها و محرک‌هایی نیز بر روی آن نصب شده‌اند.
- استفاده از تمام سنسورها و محرک‌های در دسترس به پیچیدگی سیستم کنترل منجر می‌شود و تعمیر و نگه‌داری آن‌را دشوارتر و پرهزینه می‌کند.
- یا امکان بهره‌برداری هم‌زمان از آن‌ها امکان‌پذیر نباشد.
- یا با فن‌آوری‌های جدید یا بالا رفتن مشخصه‌های عملکردی سیستم، تجدید نظر در انتخاب حسگرها و محرک‌ها ضروری باشد.
- در بسیاری از سیستم‌های عملی تنوع حسگرها و آزادی عمل در انتخاب آن-ها بیشتر از محرک‌ها است و انتخاب محرک‌ها اغلب با توجه به محدودیت-های عملی بسیار محدودتر است.

- انتخاب مناسب مجموعه IO
- معیارهای ارزیابی انتخاب مجموعه IO:
  - می نیمم فاز بودن
  - کنترل پذیری و رویت پذیری
  - کنترل پذیری ورودی-خروجی
    - کوچک ترین مقدار استثنایی
    - عدد آرایه بهره نسبی

می‌نیمم‌فاز بودن سیستم. هر کدام از مجموعه‌های انتخاب شده ورودی و خروجی، ماتریس تابع تبدیل یا نمایش فضای حالتی را می‌دهد که در آن‌ها تعداد و مکان صفرهای سیستم متفاوت است. توجه کنید که در این مجموعه‌ها، ماتریس‌های B و C در نمایش فضای حالت سیستم کاملاً تغییر خواهند کرد. با توجه به محدودیت جدی که صفرهای نیمه راست صفحه در عملکرد سیستم‌های چندمتغیره ایجاد می‌کنند، بدیهی است مجموعه‌هایی که به صفرهای نیمه راست صفحه‌ی s منجر می‌گردند، کاندیدهای مناسبی برای ورودی و خروجی نخواهند بود.

کنترل‌پذیری حالت و رؤیت‌پذیری. فرض کنید که سیستم کنترل‌پذیر حالت، رؤیت‌پذیر و پایدار است و با (A, B, C) داده شده است. می‌توان تحقق بالانس شده سیستم را به دست آورد که در آن ماتریس‌های گرامیان کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری، L_c و L_o، مساوی، قطری، و معین مثبت هستند و دو معادله ماتریسی لیاپانوف زیر را برآورده می‌سازند:

$$AL_c + L_cA^T + BB^T = 0 \qquad (۷-۲-۱)$$

$$A^TL_o + L_oA + C^TC = 0 \qquad (۷-۲-۲)$$

عناصر قطری L_c و L_o را *مقادیر استثنایی هانکل*[۱] می‌نامند. این مقادیر نشان‌دهنده کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری مشترک حالت‌های بالانس شده هستند. از این‌رو، در انتخاب مجموعه‌ی IO باید آن دسته از ورودی و خروجی‌ها را انتخاب کرد که مقادیر استثنایی هانکل بزرگ‌تری دارند.

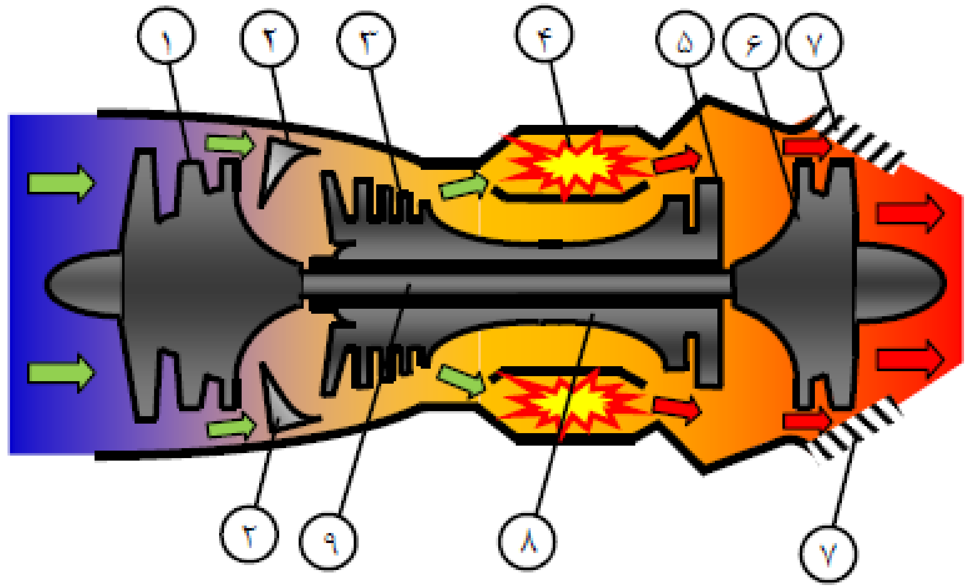
کنترل‌پذیری ورودی- خروجی. بسیاری از روش‌ها و معیارهای انتخاب ورودی و خروجی به ارائه معیارهایی کمّی برای ارزیابی کنترل‌پذیری ورودی- خروجی می‌پردازند. بنابر تعریف سیستم را کنترل‌پذیر ورودی- خروجی گویند اگر بتوان به عملکرد مقاوم قابل قبولی دست پیدا کرد. به عبارت دیگر، ورودی‌ها و خروجی‌های سیستم در حضور نامعینی‌های کراندار، ورودی‌های مرجع، اغتشاشات و نویزهای حسگر مقادیر قابل قبولی داشته باشند. ابزار اصلی به کار گرفته شده در بسیاری از روش‌ها و معیارهای ارزیابی کنترل‌پذیری ورودی- خروجی، تجزیه مقدار استثنایی است. در اینجا به ارائه مختصر برخی از این معیارها می‌پردازیم.

کوچک‌ترین مقدار استثنایی. نخستین معیار کنترل‌پذیری ورودی- خروجی که اغلب برای انتخاب ورودی و خروجی‌ها به کار گرفته می‌شود، کوچک‌ترین مقدار استثنایی وابسته فرکانسی است. به عبارت دیگر رد هک ،، $\underline{\sigma}(\mathrm{G}(j\omega)) \geq 0$ آن $\mathrm{G}(j\omega)$ ماتریس تابع تبدیل به دست آمده از انتخاب ورودی و خروجی است. قانون کلی آن است که باید مجموعه ورودی و خروجی‌ای را انتخاب کرد که $\underline{\sigma}(\mathrm{G}(j\omega))$ آن بزرگ باشد.

عدد *آرایه بهره نسبی*[1] *(RGA).* یکی از پرکاربردترین معیارها و شاخص‌های کنترل‌پذیری ورودی- خروجی RGA است. RGA در حل مسأله‌ی جفت کردن ورودی- خروجی به طور گسترده استفاده شده است. این روش به تفصیل در بخش ۷-۳ بررسی می‌شود. در اینجا، با ارائه‌ی تعریفی از آن و عدد RGA، کاربرد آن را در انتخاب ورودی- خروجی بیان می‌کنیم. آرایه بهره نسبی (RGA) برای یک دستگاه با تابع تبدیل مربعی و ناویژه $G(s)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Lambda\big(G(s)\big) \triangleq G(s).*\left(G(s)^{-1}\right)^{T}$$

• یک مثال عملی



۱: فن
۲: پره‌های متغیر ورودی
۳: کمپرسور
۴: شیر تنظیم سوخت و محفظه‌ی احتراق
۵: توربین فشار بالا
۶: توربین فشار پایین
۷: نازل با سطح مقطع متغیر
۸: شافت کمپرسور
۹: شافت فن

شکل ۱-۷ موتور جت توربوفن

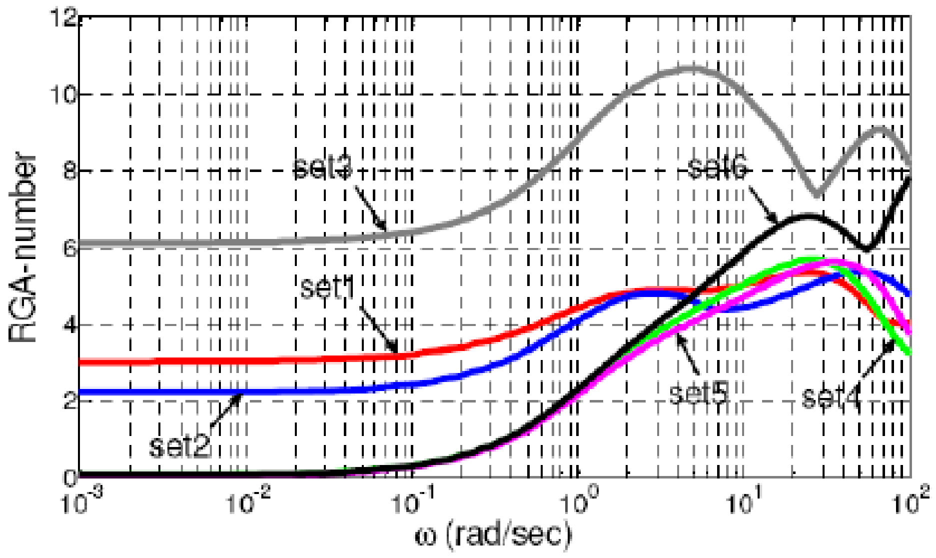
- ورودی های کنترلی موتور
- خروجی های موتور: متغیرهایی که کنترل آن ها برای موتور مهم است.

جدول ۷-۱ شش مجموعه کاندیدا از متغیرهای کنترل‌شونده

شماره‌ی مجموعه	زیر مجموعه‌ی کاندیدا
۱	$[N_۱ \quad LPCPR \quad N_۲]$
۲	$[OPR \quad LPCPR \quad N_۲]$
۳	$[EPR \quad LPCPR \quad N_۲]$
۴	$[N_۱ \quad LPCEMN \quad N_۲]$
۵	$[OPR \quad LPCEMN \quad N_۲]$
۶	$[EPR \quad LPCEMN \quad N_۲]$

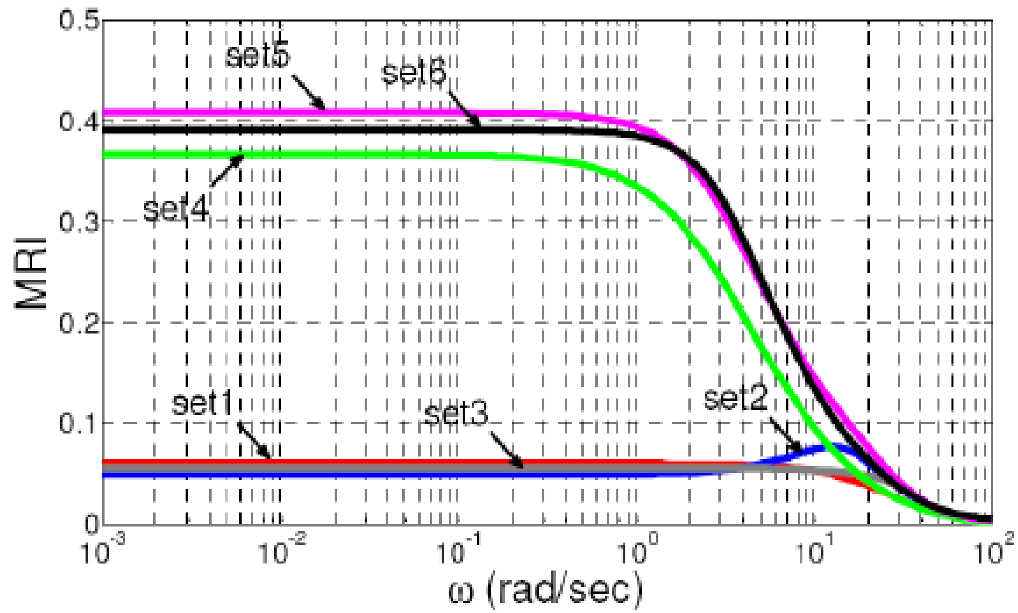
- می نیمم فاز بودن

- عدد آرایه بهره نسبی



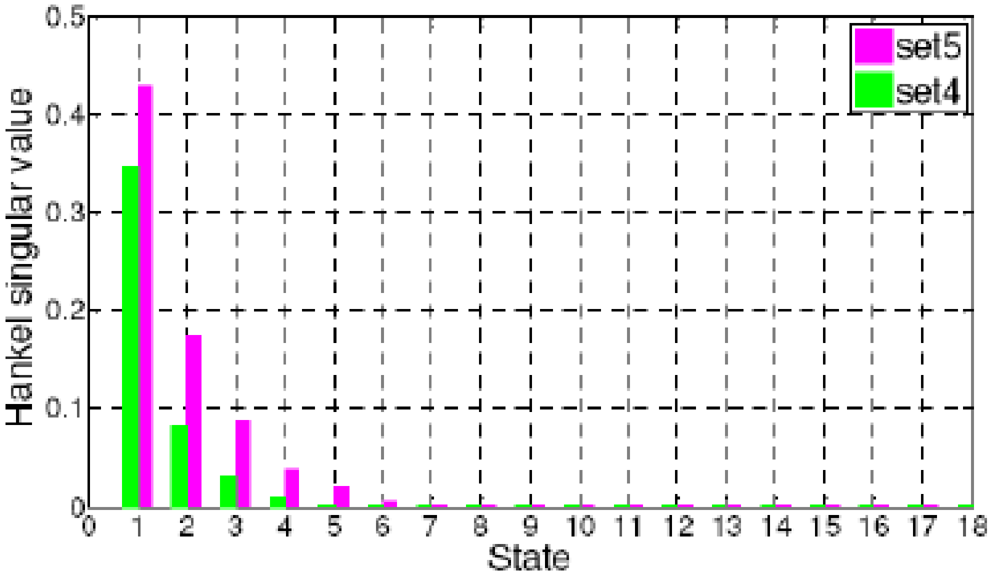
شکل ۷-۳ عددهای RGA برای شش مجموعه‌ی کاندید

- کوچک ترین مقدار استثنایی



شکل ۷-۴ کوچک‌ترین مقدار استثنایی

- کنترل پذیری و رویت پذیری



شکل ۷-۵ مقادیر استثنایی هانکل برای مجموعه‌های ۴ و ۵

ماتریس تابع تبدیل نهایی. پس از تعیین ورودی‌ها و خروجی‌های سیستم، ماتریس تابع تبدیل آن در نقطه کار ٪۸۷ حداکثر رانش موتور به صورت زیر به‌دست آمده است

$$G(s) = \frac{۱}{s^{۲} + ۱۲/۷s + ۱۶/۸}\begin{bmatrix} ۷/۶s + ۱۶/۳ & ۲/۲s + ۲/۶ & -۲/۲s - ۱/۳ \\ -۷s + ۰/۷ & -۲/۸s - ۵/۷ & ۳/۳s + ۹/۶ \\ ۲s + ۲۶/۲ & ۰/۶s - ۳/۹ & ۱/۱s + ۱۱/۲ \end{bmatrix}$$

- **انتخاب پیکربندی کنترل یا مساله جفت کردن ورودی-خروجی**

  - تعریف مساله
  - تاریخچه
  - آرایه بهره نسبی یا Relative Gain Array (RGA)

• اصول RGA

ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = [g_{ij}(s)] \qquad i,j = ۱,\dots,m \qquad (۱-۳-۷)$$

که در آن $g_{ij}(s)$ بهره حلقه باز از jامین ورودی به iامین خروجی است. بردارهای ورودی و خروجی را به صورت $U(s) = [u_۱(s) \quad \dots \quad u_m(s)]^T$ و $Y(s) = [y_۱(s) \quad \dots \quad y_m(s)]^T$ در نظر بگیرید. در کنترل غیرمتمرکز سیستم‌های چندمتغیره، هر خروجی سیستم با یک و تنها یک ورودی سیستم کنترل می‌شود. لذا، برای کنترل یک خروجی معین مانند $y_i(s)$، پیدا کردن ورودی متناظر مانند $u_j(s)$ که بیش‌ترین تأثیر را بر آن داشته باشد و در ضمن حلقه کنترل شده کم‌ترین تأثیر را از سایر حلقه‌ها بپذیرند، مهم است. آرایه بهره نسبی (RGA) ابزار مناسبی برای این جفت‌یابی بین خروجی‌ها و وردی‌ها است.

• مفهوم بهره نسبی

$$\lambda_{ij} = \frac{g_{ij}}{h_{ij}}$$

- آرایه بهره نسبی یا Relative Gain Array (RGA)

$$\Lambda = [\lambda_{ij}] \qquad i, j = 1, \dots, m$$

- محاسبه آرایه بهره نسبی (RGA)

$$\Lambda(G) = \left[\lambda_{ij}\right] = G \cdot * G^{-T}$$

- مثال ۷-۱
- مثال ۷-۲
- مثال ۷-۳

مثال ۷-۳ ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{۱}{۰/۱s + ۱} & \dfrac{۱}{s + ۱} \\ \dfrac{۲}{s + ۱} & \dfrac{۱}{۰/۵s + ۱} \end{bmatrix}$$

با اِعمال ورودی $\mathbf{u} = [۱ \quad ۰]^T$، مقدار حالت ماندگار خروجی اول یک است، $y_۱ = ۱$ و لذا $g_{۱۱}(۰) = ۱$. توجه کنید که با $u_۲(s) = -۲\frac{۰/۵s+۱}{s+۱}u_۱(s)$، حلقه دوم تحت کنترل محکم خواهد بود و $y_۲(s) = ۰$. با جایگزینی $u_۲(s)$ در حلقه اول به دست می‌آوریم

$$y_۱(s) = \left[\frac{۱}{۰/۱s + ۱} + \frac{۱}{s + ۱}\frac{-۲\left(۰/۵s + ۱\right)}{s + ۱}\right]u_۱(s)$$

و مقدار حالت ماندگار $y_۱$ برای ورودی پله واحد $u_۱ = ۱$، ۱- است، لذا $h_{۱۱}(۰) = -۱$ و $\lambda_{۱۱} = -۱$. بنابر این RGAی سیستم به صورت زیر است

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

با توجه به حالت پنجم در مثال ۷-۲، باید از $u_۲$ برای کنترل $y_۱$ و از $u_۱$ برای کنترل $y_۲$ استفاده کرد.

■

- خواص آرایه بهره نسبی (RGA)

خاصیت ۱ با توجه به این که $GG^{-1} = I$، می‌توان نشان داد که مجموع عناصر در هر ردیف و هر ستون RGA برابر ۱ است.

خاصیت ۲ جایگشت ردیف‌ها و ستون‌ها در ماتریس تابع تبدیل سیستم به همان جایگشت در RGA منجر می‌گردد.

خاصیت ۳ RGA به مقیاس‌دهی ورودی و خروجی وابسته نیست.

خاصیت ۴ RGA برای ماتریس‌های تابع تبدیل قطری و بالا یا پایین مثلثی ماتریس واحد است. هم‌چنین برای سیستم‌های چندمتغیره ۲ × ۲ و ۳ × ۳، از $\Lambda(G) = I$ می‌توان نتیجه گرفت که سیستم در حالت ۲ × ۲ حتماً مثلثی است و در حالت ۳ × ۳ *عمدتاً مثلثی*[1] است. سیستم‌های چندمتغیره عمدتاً مثلثی، سیستم‌هایی است که با جایگشت‌های ستونی یا ردیفی می‌توان آن‌ها را مثلثی کرد. توجه کنید که این موضوع برای حالت کلی $m \times m$ لزوماً صادق نیست.

خاصیت ۵ عناصر RGA را می‌توان از رابطه‌ی زیر به دست آورد

$$\lambda_{ij} = (-۱)^{i+j} \frac{g_{ij} \det(G^{ij})}{\det(G)}$$

که در آن G^{ij} از G با حذف ستون و ردیف مناسب به‌دست آمده است.

خاصیت ۶ می‌توان نشان داد که آشفتگی‌های نسبی در عناصر G و عناصر معکوس G به صورت زیر به هم مرتبط هستند

$$\frac{d\hat{g}_{ji}}{\hat{g}_{ji}} = -\lambda_{ij} \frac{dg_{ij}}{g_{ij}}$$

توجه کنید که اگر λ_{ij} بزرگ باشد، تغییر در g_{ij} به تغییرات نسبی بزرگ‌تری در $\hat{g}_{ji}$ منجر می‌گردد که نامطلوب است.

خاصیت ۷ اگر یک عنصر ماتریس تابع تبدیل از g_{ij} به $g_{ij}(۱ - \frac{۱}{\lambda_{ij}})$ تغییر کند، ماتریس تابع تبدیل آشفته شده، ویژه خواهد شد.

خاصیت ۸ در صورتی که از معکوس تابع تبدیل در طراحی کنترل‌کننده استفاده کنیم، با بزرگ بودن عناصر RGA حساسیت بسیار شدید خواهیم داشت.

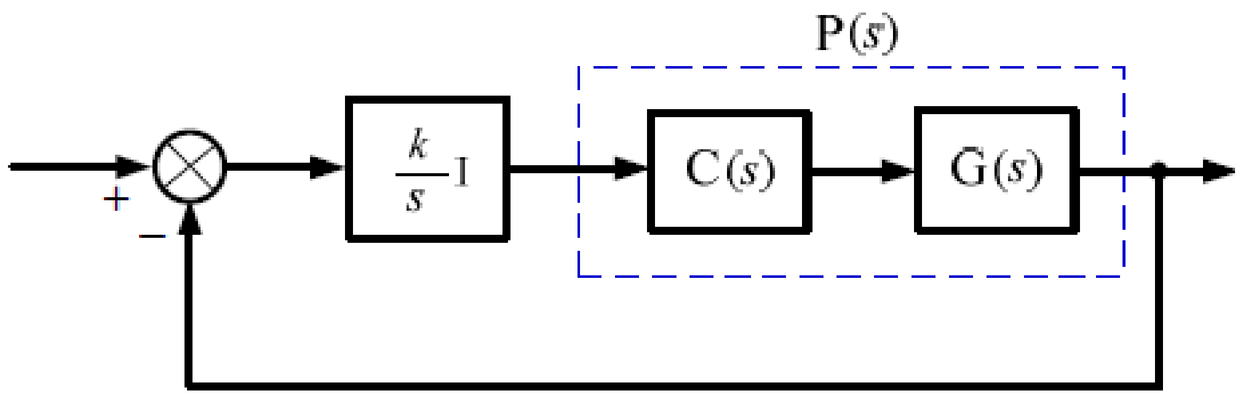
خاصیت ۹ می‌توان نشان داد که

$$\frac{d\lambda_{ij}}{\lambda_{ij}} = \left(1 - \lambda_{ij}\right)\frac{dg_{ij}}{g_{ij}}$$

خاصیت ۱۰ اگر ماتریس تابع تبدیل $G(s)$ سیستم چندمتغیره پایدار، صفر و قطبی در $s = 0$ نداشته باشد، و $\lambda_{ij}(\infty)$ و $\lambda_{ij}(0)$ هم علامت نباشند، آنگاه یکی از موارد زیر درست است: $g_{ij}(s)$ یک صفر در نیمه راست صفحه دارد، $G(s)$ یک صفر انتقال در نیمه راست صفحه دارد یا $G^{ij}(s)$ یک صفر انتقال در نیمه‌ی راست صفحه دارد.

- **ملاحظات پیکربندی در طراحی سیستم های کنترل غیرمتمرکز**

  - سیستم های کنترل انتگرالی چند متغیره



  - سیستم پایدارپذیر انتگرالی

- **قضیه ۷–۱**

دستگاه داده شده با ماتریس تابع تبدیل پایدار سره و گویای $\mathrm{P}(s)$، پایدارپذیر انتگرالی است تنها اگر $\det[\mathrm{P}(0)] > 0$.

نکته این شرط یک شرط لازم و کافی برای سیستم‌های یک ورودی و یک خروجی است.

مثال ۷-۴ ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$\mathrm{P}(s) = \frac{۱}{s+۱}\begin{bmatrix} \pm۲ & ۱ \\ ۱ & \pm۲ \end{bmatrix}$$

در هر دو حالت $\det[\mathrm{P}(۰)] = ۳$ و شرط لازم پایداری را دارند. معادله مشخصه حلقه بسته برای سیستم نشان داده در شکل ۷-۶ برای ۲+ عبارت است از

$$s^۴ + ۲s^۳ + \left(۱ + ۴k\right)s^۲ + ۴ks + ۳k^۲ = ۰$$

که برای $k > ۰$ پایدار است. در حالی که برای ۲- معادله‌ی مشخصه حلقه بسته عبارت است از

$$s^۴ + ۲s^۳ + \left(۱ - ۴k\right)s^۲ - ۴ks + ۳k^۲ = ۰$$

که برای $k > ۰$ ناپایدار است.

■

- تمامیت یک خاصیت مهم در سیستم های کنترل غیرمتمرکز
- **قضیه ۷–۲**

سیستم چندمتغیره نشان داده شده در شکل ۷-۶ را در نظر بگیرید که در آن $\mathrm{C}(s)$ یک ماتریس تابع تبدیل قطری است. هم‌چنین فرض کنید که:

- $\mathrm{G}(s)$ پایدار است.
- $\mathrm{P}(s)$ یک ماتریس گویا و سره است.
- تمام حلقه‌های بسته یک ورودی و یک خروجی که از باز کردن هر کدام از $m-1$ حلقه‌های فیدبک به‌دست می‌آیند پایدار هستند.

در این صورت، سیستم برای تمام $k>0$ ناپایدار است اگر

$$NI[G(0)] = \frac{\det[G(0)]}{\prod_i g_{ii}(0)} \prec 0$$

شاخص نیدرلینسکی

مثال ۷-۵ ماتریس تابع تبدیل حالت ماندگار زیر را در نظر بگیرید

$$G(\circ) = \begin{bmatrix} -۱۱/۳ & -۲/۳۶۸ & -۹/۸۱۱ & \circ/۳۷۴ \\ ۵/۲۴ & \circ/۴۲۲ & ۵/۹۸۴ & -۱/۹۸۶ \\ -\circ/۳۳ & \circ/۵۱۳ & ۲/۳۸ & \circ/\circ۲\circ۴ \\ ۴/۴۸ & ۱۵/۵۴ & -۱۱/۳ & -\circ/۱۷۶ \end{bmatrix}$$

و RGAی متناظر عبارت است از

$$\Lambda = \begin{bmatrix} ۱/\circ\circ۶۳ & -\circ/\circ۳۱۴ & \circ/۱۲۶۴ & -\circ/۱\circ۱۳ \\ -\circ/۱\circ۴۵ & \circ/\circ\circ\circ۳ & \circ/\circ۱\circ۷ & ۱/\circ۹۳۵ \\ \circ/۱\circ۸۱ & \circ/۱۶۳\circ & \circ/۷۲۶۴ & \circ/\circ\circ۲۵ \\ -\circ/\circ\circ۹۹ & \circ/۸۶۸\circ & \circ/۱۳۶۶ & \circ/\circ\circ۵۴ \end{bmatrix}$$

داریم $NI[G(\circ)] = -۴۹\circ/۸۹۱$ و لذا سیستم را نمی‌توان با کنترل غیرمتمرکز پایدار کرد. از طرف دیگر، توجه کنید که اگر ردیف‌های دوم و چهارم را در $G(\circ)$ جا به جا کنیم، شاخص نیدرلینسکی جدید ۱/۱۸۱۴ خواهد بود که شرط قضیه ۷-۲ را برآورده نمی‌سازد.

■

- کاربرد همزمان RGA و NI در تحلیل تمامیت سیستم های کنترل غیرمتمرکز

در ارتباط با کاربرد توأمان RGA و NI در تحلیل تمامیت سیستم‌های کنترل غیرمتمرکز نتایج جالبی وجود دارد. برای مثال می‌توان نشان داد که برای $m > ۲$، اگر هر کدام از λ_{ii}ها منفی باشد، سیستم کنترل فیدبک غیرمتمرکز یکی از خواص زیر را خواهند داشت [2]:

- اگر $NI[G(۰)] < ۰$، سیستم حلقه بسته ناپایدار خواهد بود، اما سیستم کاهش یافته با حذف حلقه iام را می‌توان پایدار کرد.
- اگر $NI[G(۰)] > ۰$، سیستم حلقه بسته با از کار افتادن حلقه متناظر iاُم ناپایدار خواهد شد.

توجه کنید که هر دو حالت بالا نامطلوب است و در صورت امکان در طراحی سیستم‌های کنترل باید از رخداد آن‌ها جلوگیری کرد.

• مثال ۷-۶

$$G(\circ) = \begin{bmatrix} \circ/۲ & \circ/۸ & \circ/۳ \\ -۱ & \circ/۱ & ۱ \\ \circ/۵ & -\circ/۶ & \circ/۱ \end{bmatrix}$$

و RGAی متناظر عبارت است از

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \circ/۱۵۹ & \circ/۶۲۶ & \circ/۲۱۵ \\ \circ/۳۳۹ & -\circ/\circ۱۷ & \circ/۶۷۸ \\ \circ/۵\circ۲ & \circ/۳۹۱ & \circ/۱\circ۷ \end{bmatrix}$$

توجه کنید که $\lambda_{۲۲}$ منفی است و NI برابر ۳۸۳/۵ است. لذا سیستم حلقه بسته در صورت از کار افتادن حلقه دوم ناپایدار خواهد شد. بنابر این جفت کردن ورودی- خروجی زیر

$$(u_۱ \leftrightarrow y_۱ \quad u_۲ \leftrightarrow y_۲ \quad u_۳ \leftrightarrow y_۳)$$

پیشنهاد نمی‌شود، زیرا سیستم طراحی شده تمامیت نخواهد داشت. از طرف دیگر، اگر اولین و دومین ردیف را جا به جا کنیم داریم

$$G(\circ) = \begin{bmatrix} -۱ & \circ/۱ & ۱ \\ \circ/۲ & \circ/۸ & \circ/۳ \\ \circ/۵ & -\circ/۶ & \circ/۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \Lambda = \begin{bmatrix} \circ/۳۳۹ & -\circ/\circ۱۷ & \circ/۶۷۸ \\ \circ/۱۵۹ & \circ/۶۲۶ & \circ/۲۱۵ \\ \circ/۵\circ۲ & \circ/۳۹۱ & \circ/۱\circ۷ \end{bmatrix}$$

در این حالت تمام λ_{ii}ها مثبت هستند و NIی متناظر نیز ۹/۵۸۷ است. بنابراین، جفت کردن ورودی- خروجی زیر پیشنهاد می‌گردد

$$(u_۱ \leftrightarrow y_۲ \quad u_۲ \leftrightarrow y_۱ \quad u_۳ \leftrightarrow y_۳)$$

زیرا امکان پایدارسازی سیستم حلقه بسته وجود دارد.

- تمامیت در سیستم های کنترل صنعتی

قضیه ۷-۳ فرض کنید که $\mathrm{P}(s)$ ماتریس تابع تبدیل گویا، سره و پایدارپذیر انتگرالی باشد. آن‌گاه، سیستم حلقه بسته با از کارافتادگی jامین حسگر یا محرک پایدارپذیر انتگرالی نیست اگر $\det(\mathrm{P}^{jj}(\circ)) < \circ$.

- **قضیه ۷–۴**

اگر

- $\lambda_j(0) < 0$
- $C(s)$ یک ماتریس جبران‌ساز قطری
- $P(s)$ سره

آن‌گاه، با هر بهره مثبت $k > 0$، سیستم حلقه بسته حداقل یکی از خواص زیر را دارد:

- ناپایدار است.
- حلقه jام متناظر با $(u_j \leftrightarrow y_i)$، با باز کردن سایر حلقه‌ها ناپایدار است.
- سیستم حلقه بسته با برداشتن jامین حلقه ناپایدار است.

نکته ۱ اگر هر کدام از عناصر قطری RGA منفی باشند، کنترل غیرمتمرکز با عمل انتگرالی به سیستم حلقه بسته‌ای بدون تمامیت منجر می‌گردد. قطعاً این مطلب در سیستم‌های واقعی نامطلوب است.

نکته ۲ در سیستم‌های چندمتغیره ۲ × ۲، همواره می‌توان با جایگشت مناسب ردیف‌های ماتریس تابع تبدیل به پیکربندی مناسبی دست یافت که عناصر قطری RGA مثبت باشند. اما این کار در سیستم‌های چندمتغیره با تعداد ورودی‌ها و خروجی‌های سه یا بیش‌تر لزوماً امکان‌پذیر نیست.

نکته ۳ شرط عناصر قطری منفی در قضیه ۷-۴ کافی ولی غیرلازم است.

مثال ۷-۷ ماتریس تابع تبدیل حالت ماندگار زیر را در نظر بگیرید

$$G(\circ) = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -\circ/۱ & \circ/۱ \\ \alpha & ۲ & -۱ & \circ/۲ \\ -۲ & -۳ & ۱ & ۱ \\ -\circ/۱ & \circ & \circ/۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

برای $\alpha = ۱$، داریم

$$\Lambda = \begin{bmatrix} ۳/۷۷ & -۳/\circ۵ & \circ/۲۲ & \circ/\circ۶ \\ ۱/۷۱ & -۴/۱۹ & ۳/۳۸ & \circ/۱ \\ -۴/۷۹ & ۸/۲۴ & -۲/۹۹ & \circ/۵۴ \\ \circ/۳۱ & \circ & \circ/۳۹ & \circ/۳ \end{bmatrix}$$

بدیهی است که تعویض دومین و سومین ردیف می‌دهد $\lambda_{ii}(\circ) > \circ$. برای $\alpha = \circ/۱$، داریم

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -۷/\circ۴ & ۱\circ/۲۲ & -۱/۹۲ & -\circ/۲۶ \\ -\circ/۳۲ & ۷/۸۲ & -۶/۳۱ & -\circ/۱۹ \\ ۸/۹۴ & -۱۷/\circ۴ & ۱\circ/۶۱ & -۱/۵۱ \\ -\circ/۵۸ & \circ & -۱/۳۸ & ۲/۹۶ \end{bmatrix}$$

توجه کنید که در این حالت، با هیچ جایگشتی نمی‌توان تمام عناصر قطری RGA را مثبت کرد.

- تعریف سیستم کنترل پذیر انتگرالی و کاربرد آن در سیستم های عملی

- **قضیه ۷–۵**

ماتریس تابع تبدیل گویای $\mathrm{P}(s)$ کنترل‌پذیر انتگرالی است اگر تمام مقادیر ویژه $\mathrm{P}(0)$ در نیمه راست صفحه مختلط قرار گیرند و کنترل‌پذیر انتگرالی نیست اگر هر کدام از مقادیر ویژه $\mathrm{P}(0)$ در نیمه چپ صفحه قرار گیرند.

نکته ۱ قضیه ۷–۵ حالت‌هایی را که مقادیر ویژه $\mathrm{P}(0)$ روی محور موهومی قرار دارند در نظر نمی‌گیرد.

نکته ۲ برای پایدارپذیری انتگرالی، شرط $\det(\mathrm{P}(0)) > 0$ الزامی است. توجه کنید که اگر تعداد مقادیر ویژه سمت چپ زوج باشد، این شرط برآورده می‌گردد ولی شرط کنترل‌پذیری انتگرالی نقض می‌گردد. اما در حالت‌های یک ورودی و یک خروجی این دو شرط یکسان هستند.

مثال ۷–۸ سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{P}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{-3\left(-s+1\right)}{\left(s+1\right)\left(0.5s+1\right)} & \dfrac{4}{0.5s+1}\\ \dfrac{-4}{0.5s+1} & \dfrac{2}{0.5s+1}\end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه‌ی $\mathbf{P}(0)$ عبارتند از $-0.5\pm j3.12$ و لذا سیستم کنترل‌پذیر انتگرالی نیست. اما $\det(\mathrm{P}(0))=10$ و ممکن است پایدارپذیر انتگرالی باشد. معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارت است از

$$s^5+5s^4+\left(10k+8\right)s^3+\left(18k+4\right)s^2+\left(88k^2-4k\right)s+40k^2=0$$

و داریم که سیستم حلقه بسته برای $0.157<k<0.389$ پایدار است. به سیستم‌های چندمتغیره‌ای که تنها برای محدوده‌ای از بهره که شامل بهره صفر نیست پایدار هستند، سیستم‌های *کنترل‌پذیر انتگرالی مشروط*[1] گویند. این خاصیت در عمل نامطلوب است و پیدا کردن کران‌های بالا و پایین در سیستم‌های واقعی بسیار مشکل است. هم‌چنین، این سیستم‌ها تمامیت ندارند.

■

- **قضیه ۷-۶**

فرض کنید که $\mathrm{P}(s)$ گویا، سره و کنترل‌پذیر انتگرالی باشد. آن‌گاه، سیستم حلقه بسته با برداشتن jامین حسگر (محرک) کنترل‌پذیر انتگرالی است اگر تمام مقادیر ویژه $\mathrm{P}^{jj}(0)$ در نیمه راست صفحه مختلط باشند. سیستم کنترل‌پذیر انتگرالی نیست اگر با برداشتن jامین حسگر (محرک) هر کدام از مقادیر ویژه $\mathrm{P}(0)$ یا $\mathrm{P}^{jj}(0)$ در نیمه چپ صفحه مختلط قرار گیرند.

مثال ۷-۹ ماتریس تابع تبدیل حالت ماندگار زیر را در نظر بگیرید

$$P(\circ) = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۱ \\ -۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

که در آن مقادیر ویژه $P(\circ)$ عبارتند از {۳/۵۳۲، ۲/۳۴۷، ۰/۱۲۰۶} و سیستم کنترل‌پذیر انتگرالی است. اگر حلقه اول از مدار خارج شود، سیستم کاهش یافته به صورت زیر خواهد بود

$$P^{۱۱}(\circ) = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه آن {۳/۳۰۳، ۰/۳۰۳−} هستند و کنترل‌پذیر انتگرالی نیست. اگر حلقه دوم از مدار خارج شود، داریم

$$P^{۲۲}(\circ) = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه‌ی آن {۳/۶۱۸، ۱/۳۸۲} است و کنترل‌پذیر انتگرالی است. اگر حلقه سوم از مدار خارج شود، داریم

$$P^{۳۳}(\circ) = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه‌ی آن{$۲ \pm j۱$} است و کنترل‌پذیر انتگرالی است. بنابراین، طراح سیستم کنترل باید دقت نماید که حلقه اول از لحاظ معیوب شدن اهمیت بیش‌تری دارد و باید به شدت مراقبت گردد.

- تعریف سیستم کنترل پذیر انتگرالی غیر متمرکز یا DIC

تعریف ۷–۳ سیستم چندمتغیره $G(s)$ را DIC گویند اگر کنترل‌کننده‌ای قطری به صورت $\frac{1}{s}C(s)$، همان‌طور که در شکل ۷-۶ نشان داده شده است، وجود داشته باشد که برای آن سیستم حلقه بسته برای تمام $E\frac{1}{s}C(s)$ پایدار باشد، که در آن $E \in \varepsilon_D$ و $\varepsilon_D = \left\{E = \mathrm{diag}\,(\varepsilon_i) \middle| \varepsilon_i \in [0, 1], i = 1, \ldots, m\right\}$.

- از تعریف سیستم کنترل پذیر انتگرالی غیر متمرکز:

اگر سیستم چندمتغیره DIC باشد، می توان کنترل کننده قطری را چنان طراحی کرد که سیستم حلقه بسته ویژگی های زیر را داشته باشد:

- تمام تک حلقه‌ها پایدارند.
- با بستن تمام حلقه ها سیستم حلقه بسته پایدار باقی می ماند.
- سیستم حلقه بسته با وجود کم شدن هر کدام از بهره ها تا صفر، پایدار می ماند.

- چند نکته:
  - توجه کنید که DIC از کنترل پذیری انتگرالی قوی تر است
  - در کنترل پذیری انتگرالی تمام بهره ها توأمان به صفر میل می کنند
  - در DIC بهره های حلقه به صورت های گوناگونی ممکن است کاهش یابند.
  - یک سیستم چندمتغیره ممکن است کنترل‌پذیر انتگرالی باشد ولی لزوماً DIC نیست
  - یک سیستم چندمتغیره که DIC است، حتماً کنترل پذیر انتگرالی نیز هست.

- **قضیه ۷–۷**

سیستم چندمتغیره $G(s)$ کنترل‌پذیر انتگرالی غیرمتمرکز (DIC) است اگر مقادیر ویژه $G_t^+(0)D$ برای تمام t و تمام Dهای قطری مثبت در نیمه راست صفحه بسته (غیر از مبدا) قرار گیرند.

- **قضیه ۷–۸**

سیستم چندمتغیره $G(s)$ کنترل‌پذیر انتگرالی غیرمتمرکز (DIC) است اگر هر دو شرط زیر برقرار باشند:

- تمام مقادیر ویژه $G^+(0)D$ برای تمام $D \geq 0$ در RHP بسته قرار گیرند.
- بهره‌های نسبی $G(s)$ مثبت هستند.

- **قواعد جفت کردن ورودی و خروجی یا انتخاب پیکربندی کنترل**

  - جفت ورودی و خروجی را انتخاب کنید که عنصر RGAی متناظرشان نزدیک به واحد باشد.
  - شاخص نیدرلینسکی باید مثبت باشد.
  - عناصر RGAی متناظر با جفت ورودی و خروجی باید مثبت باشند.
  - از عناصر RGAی بزرگ برای جفت کردن ورودی و خروجی پرهیز نمایید.

- مثال ۷-۱۰

$$G(^\circ) = \begin{bmatrix} \gamma_1 c_1 & (1-\gamma_2)c_1 \\ (1-\gamma_1)c_2 & \gamma_2 c_2 \end{bmatrix}$$

$$\Big\Downarrow \ \textbf{RGA}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1}$$

- مثال ۷-۱۱

$$G(s)=\frac{1-s}{(5s+1)^2}\begin{bmatrix}1 & -4/19 & -25/96\\ 6/19 & 1 & -25/96\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

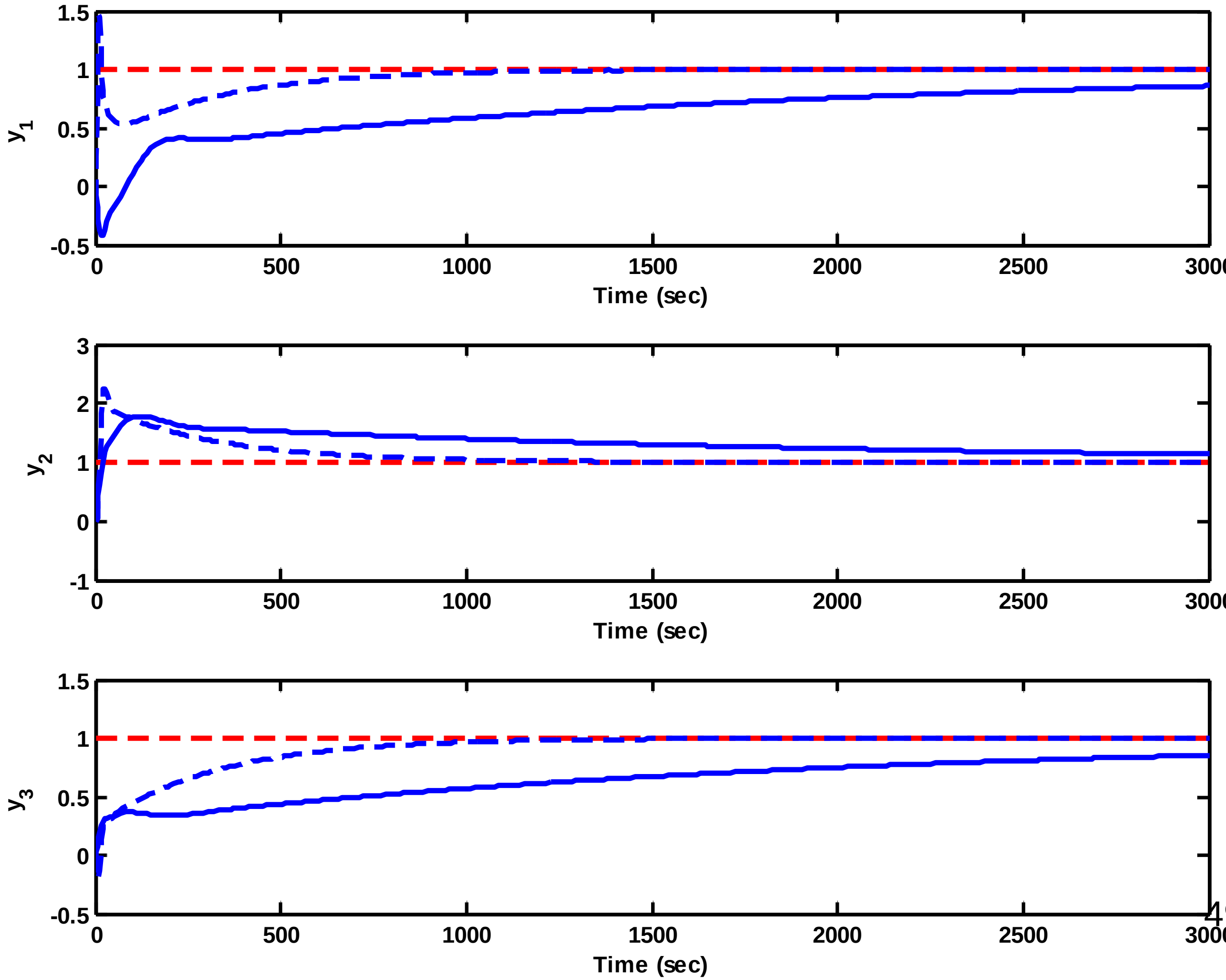
$$\Lambda=\begin{bmatrix}1 & 5 & -5\\ -5 & 1 & 5\\ 5 & -5 & 1\end{bmatrix}$$

$$(\mathrm{u}_1 \leftrightarrow \mathrm{y}_1 \quad \mathrm{u}_2 \leftrightarrow \mathrm{y}_2 \quad \mathrm{u}_3 \leftrightarrow \mathrm{y}_3)$$

و

$$(\mathrm{u}_1 \leftrightarrow \mathrm{y}_3 \quad \mathrm{u}_2 \leftrightarrow \mathrm{y}_1 \quad \mathrm{u}_3 \leftrightarrow \mathrm{y}_2)$$

	$\lambda_{ii} = ۱$ $u_۱ \leftrightarrow y_۱$ $u_۲ \leftrightarrow y_۲$ $u_۳ \leftrightarrow y_۳$		$\lambda_{ij} = ۵$ $u_۱ \leftrightarrow y_۳$ $u_۲ \leftrightarrow y_۱$ $u_۳ \leftrightarrow y_۲$	
	k_i	τ_i	k_i	τ_i
$i = ۱$	۰/۱۲۳	۳۲/۴۰	-۰/۶۸۴۰	۲۴/۱۵
$i = ۲$	۰/۱۴۴۳	۳۴/۵۴	-۰/۰۲۴۲۵	۷/۲۷۰
$i = ۳$	۰/۰۰۲۹۴	۳/۹۸۸	۰/۰۰۷۶۸۵	۰/۳۶۸۸



• طراحی کنترل کننده چندمتغیره به روش حلقه بستن ترتیبی

یک روش ساده در طراحی سیستم‌های کنترل چندمتغیره، نادیده گرفتن تداخل در سیستم و برخورد با آن‌ها به صورت سیگنال‌های اغتشاشی است. برای نمونه برای یک سیستم دو ورودی و دو خروجی داریم

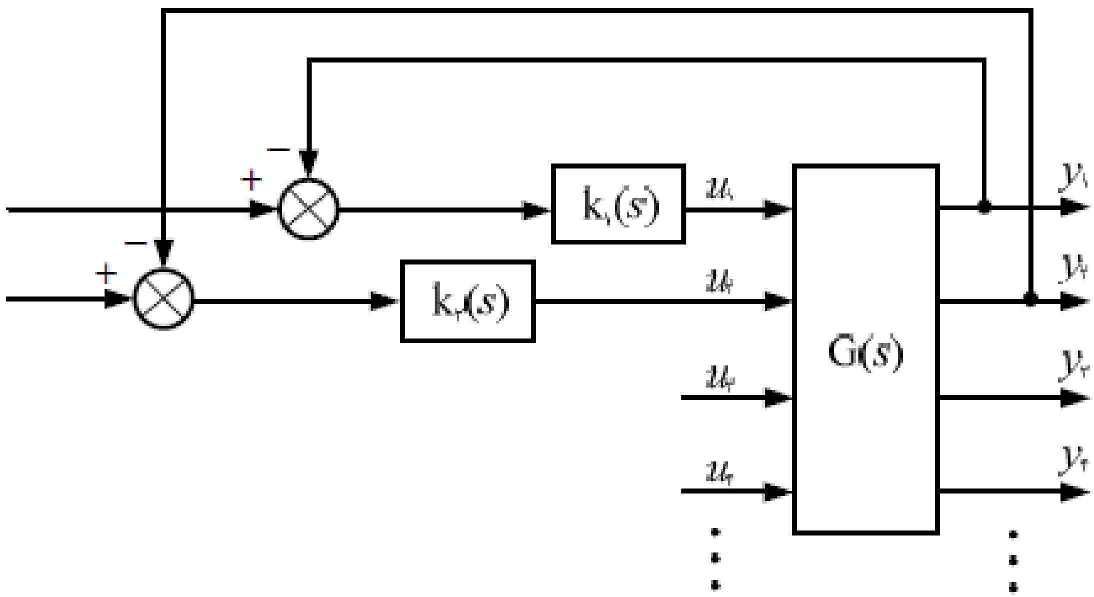
$$y_1(s) = g_{11}(s)u_1(s) + g_{12}(s)u_2(s)$$

که اگر عبارت $g_{12}(s)u_2(s)$ را با $d_1(s)$ به عنوان یک اغتشاش جایگزین کنیم داریم

$$y_1(s) = g_{11}(s)u_1(s) + d_1(s)$$

و حال می‌توان $u_1(s)$ را چنان طراحی کرد که سیستم یک ورودی و یک خروجی $g_{11}(s)$ در حلقه بسته پایدار و در حد امکان اغتشاش $d_1(s)$ را پس زند. با بستن این حلقه، اکنون به سراغ حلقه دوم رفته و $u_2(s)$ را با نادیده گرفتن تداخل از حلقه دوم (در نظر گرفتن آن به صورت یک عبارت اغتشاشی) به گونه‌ای طراحی می‌کنیم که سیستم حلقه بسته پایدار و در حد امکان عملکرد مناسبی نیز داشته باشد. توجه کنید که شرط اصلی این طراحی امکان نادیده گرفتن تداخل‌ها در سیستم چندمتغیره است.

- در حالت کلی:



- مثال ۷-۱۲

$$G(s)=\frac{1}{s+1}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

RGAی حالت ماندگار متناظر عبارت است از

$$\Lambda=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

جفت مناسب برای کنترل غیرمتمرکز سیستم ($u_1 \leftrightarrow y_1 \quad u_2 \leftrightarrow y_2$)

اولین حلقه کنترلی با کنترل‌کننده انتگرالی k_1/s :

$$y_1=\frac{2}{s+1}u_1+\frac{1}{s+1}u_2=\frac{2k_1}{s(s+1)}(r_1-y_1)+\frac{1}{s+1}u_2$$

$$y_1=\frac{2k_1}{s^2+s+2k_1}r_1+\frac{s}{s^2+s+2k_1}u_2$$

طراحی حلقه دوم

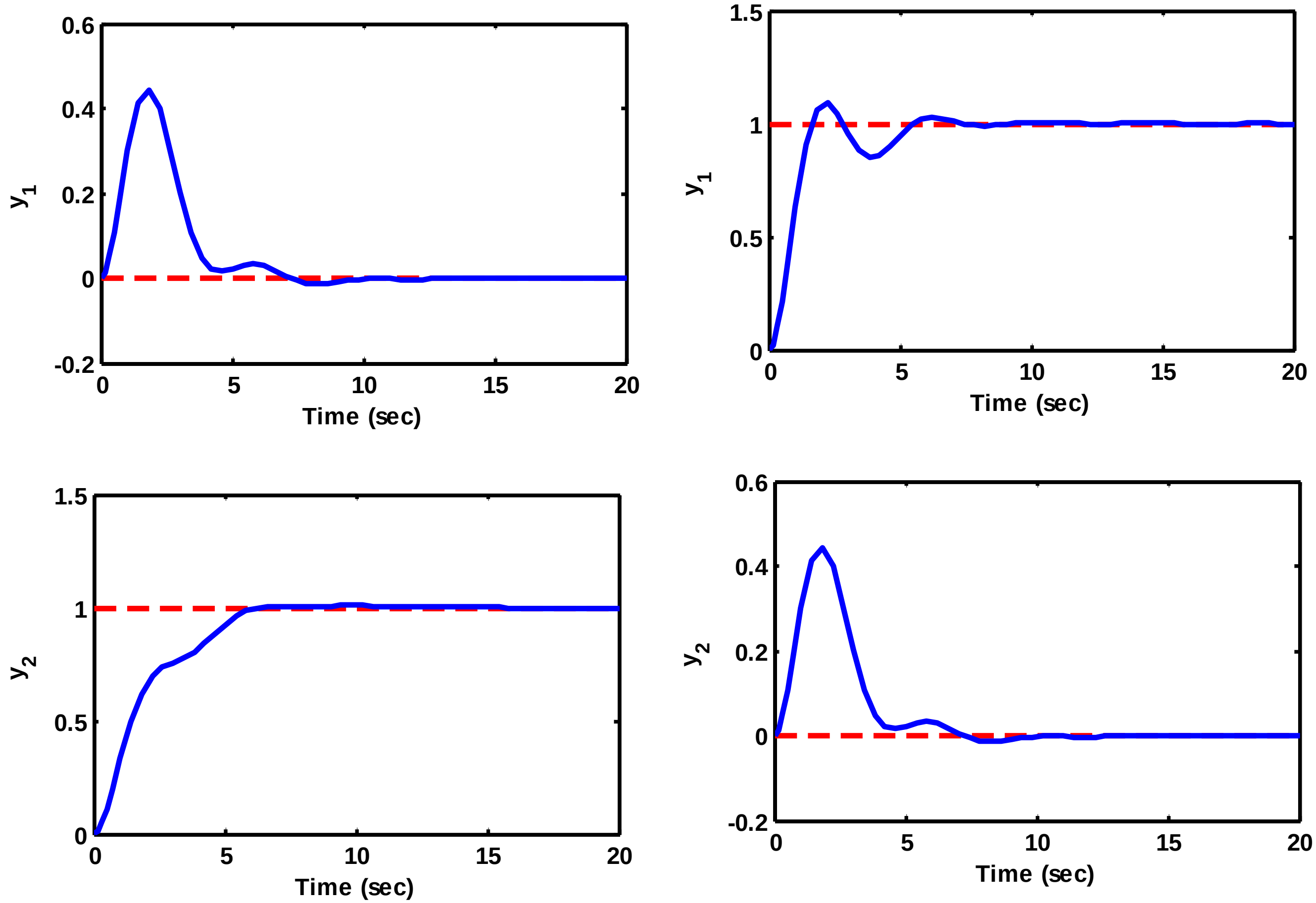
$$y_2 = \frac{1}{s+1}u_1 + \frac{1}{s+1}u_2 \quad \Rightarrow \quad y_2 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2(s+1)}u_2$$

$$\Rightarrow \quad y_2 = \frac{s^2+s+1}{(s+1)(s^2+s+2)}u_2 + \frac{1}{s^2+s+2}r_1$$

$$u_2 = \frac{k_2}{s}(r_2 - y_2)$$

$$\Rightarrow \quad y_2 = \frac{k_2(s^2+s+1)}{d_2(s)}r_2 + \frac{s(s+1)}{d_2(s)}r_1$$

$$d_2(s) = s^4 + 2s^3 + (3+k_2)s^2 + (2+k_2)s + k_2$$


0.6
0.4
0.2
0
-0.2
y_1
0
5
10
15
20
Time (sec)
1.5
1
0.5
0
y_1
0
5
10
15
20
Time (sec)
1.5
1
0.5
0
y_2
0
5
10
15
20
Time (sec)
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
y_2
0
5
10
15
20
Time (sec)

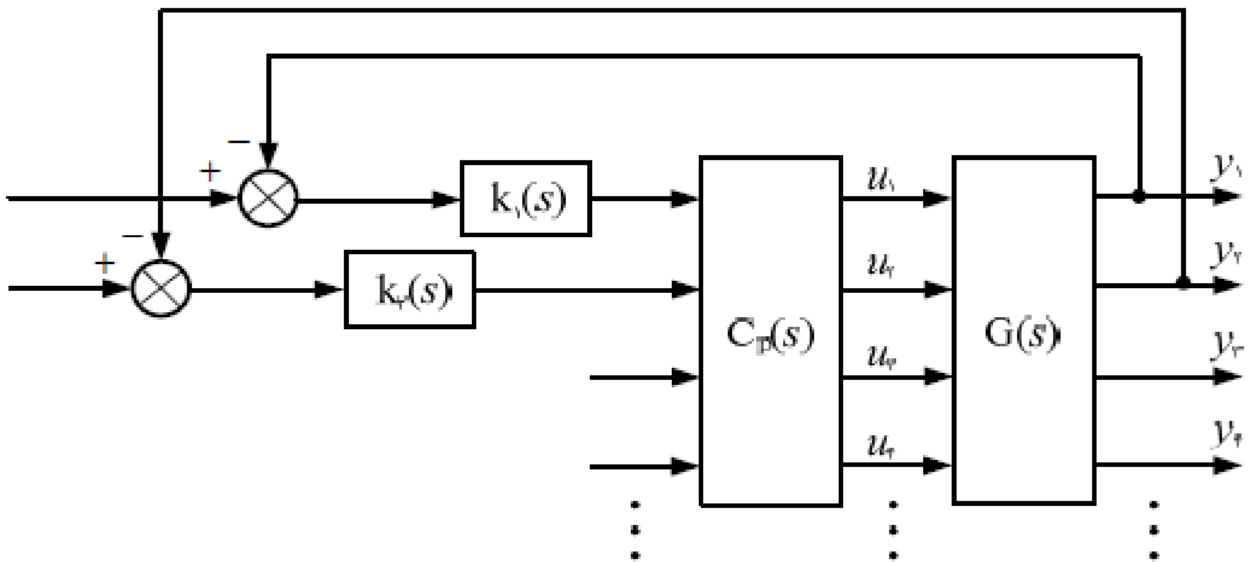
- **طراحی ماتریس های پیش جبران ساز برای حل دشواری کنترل**

  - وجود صفرهای عنصر سمت راست محور
  - تداخل شدید در حلقه های کنترلی

  - راهکار کنترلی در حالت کلی:

$$C(s) = C_p(s)K(s)$$

- در حالت کلی:



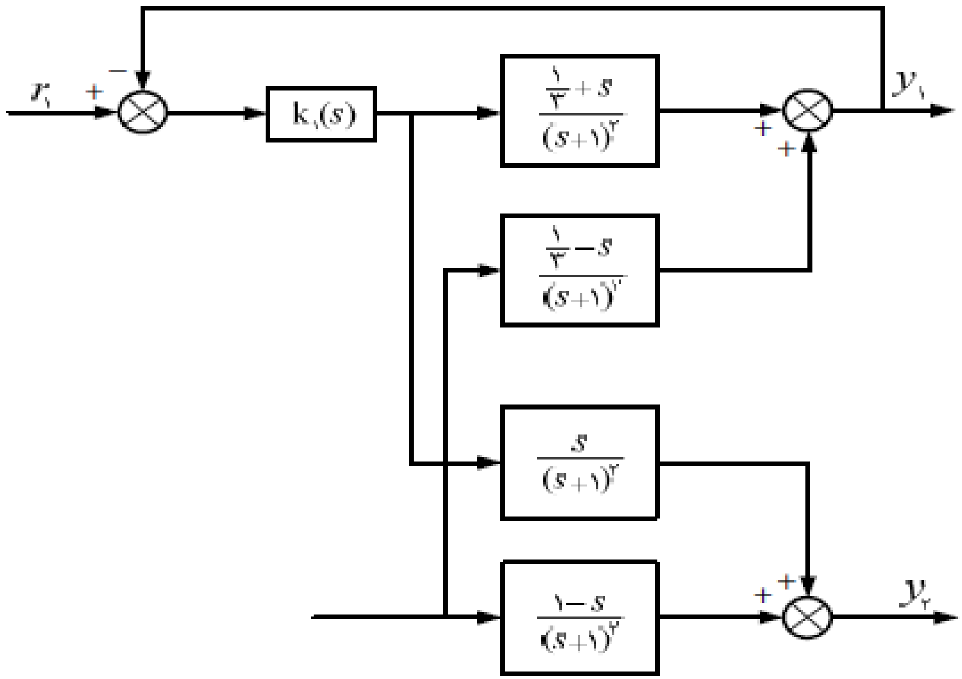
- مثال ۷-۱۳

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix}1-s & \frac{1}{3}-s\\ 2-s & 1-s\end{bmatrix}$$

مشخصه های سیستم برای طراحی؟

$$C_p(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad G(s)C_p(s)=\frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}+s & \frac{1}{3}-s\\ s & 1-s\end{bmatrix}$$

بستن اولین حلقه:



داریم:

$$\frac{1-s}{(s+1)^2}+\frac{s}{(s+1)^2}\mathrm{h}(s)\frac{\frac{1}{3}-s}{(s+1)^2} \qquad \mathrm{h}(s)=\frac{-k_1(s)}{1+\left[(\frac{1}{3}+s)/(s+1)^2\right]k_1(s)}$$

با توجه به می‌نیمم‌فاز بودن حلقه اول، $k_{۱}(s)$ را می‌توان بهره بالا طراحی کرد. لذا فرض می‌کنیم که

$$\left|k_{۱}(s)\right| \gg \left|(s+۱)^{۲}/(\frac{۱}{۳}+s)\right|$$

و

$$\mathrm{h}(s) \approx -(s+۱)^{۲}/(\frac{۱}{۳}+s)$$

و بدین ترتیب تابع تبدیل حلقه دوم پس از بستن حلقه اول چنین می‌شود

$$\frac{۱}{\left(۳s+۱\right)\left(s+۱\right)}$$

بنابراین مشاهده می‌شود که حلقه دوم نیز تابع تبدیلی می‌نیمم‌فاز دارد و برای آن می‌توان کنترل‌کننده‌ای مناسب طراحی کرد. لذا با طراحی مناسب Cp دشواری کنترلی را که با حضور صفرهای عنصر نیمه راست صفحه ایجاد شده بود، بر طرف کردیم.

- دکوپله سازی و غلبه قطری

تعریف ۷-۴ ماتریس تابع تبدیل گویای $P(s)$ را بر D *غالب قطری ردیفی*[۲] گویند اگر

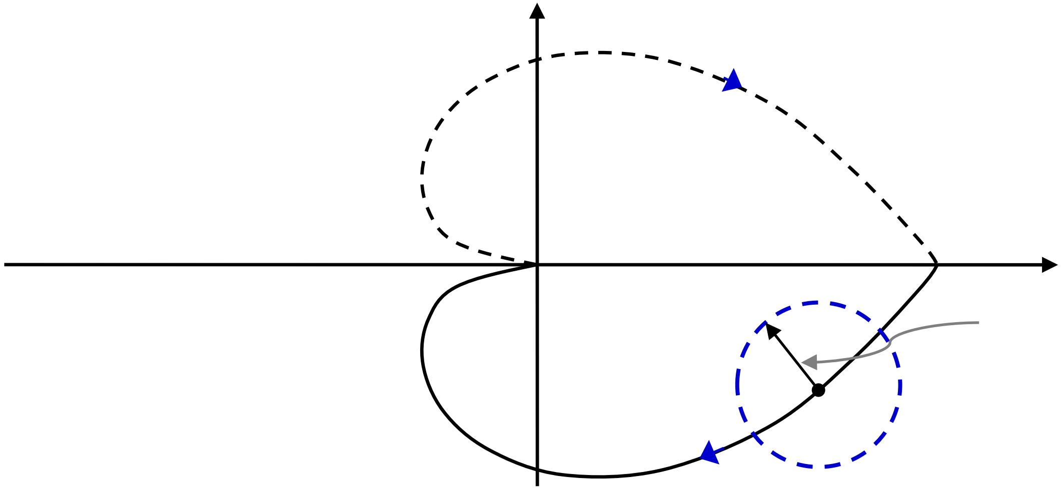
$$|P_{ii}(s)| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} |P_{ij}(s)|$$

برای $i = 1, \ldots, m$ و تمام s روی D. آن را *غالب قطری ستونی*[۳] گویند اگر

$$|P_{ii}(s)| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} |P_{ji}(s)|$$

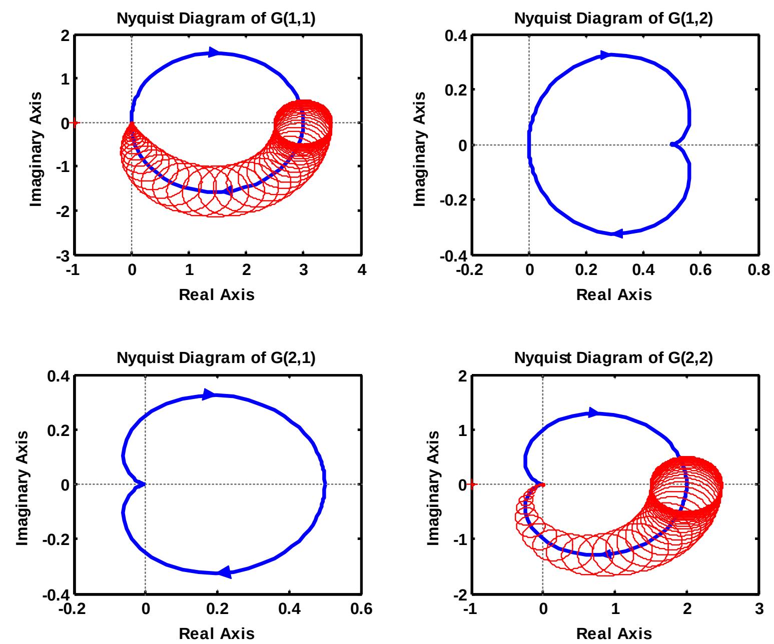
برای $i = 1, \ldots, m$ و تمام s روی D.

- ارزیابی ترسیمی غلبه قطری

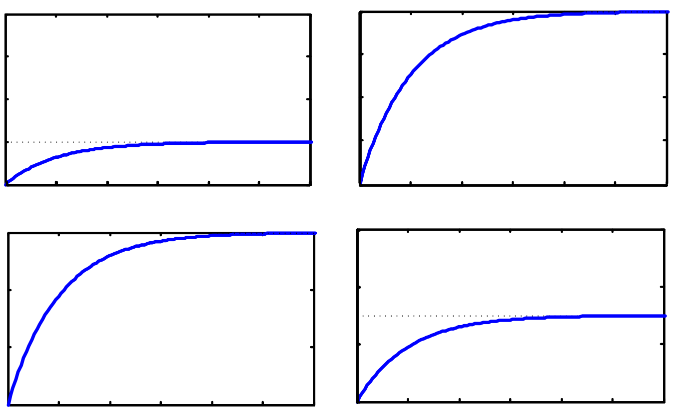


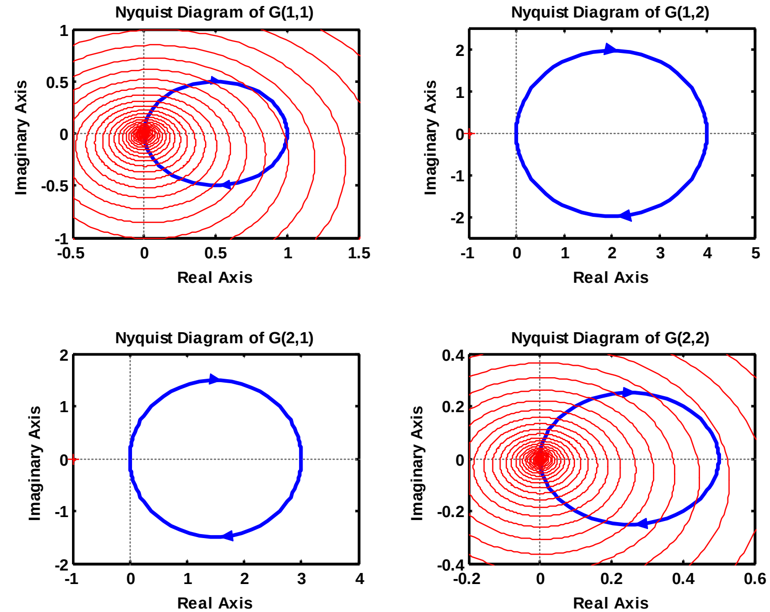
■ مثال ۷-۱۴

$$G_{۱}(s) = \frac{۱}{s^{۲} + ۲s + ۱}\begin{bmatrix} ۲s + ۳ & s + ۰/۵ \\ ۰/۵ & ۲ \end{bmatrix}$$



$$G_{۲}(s) = \frac{۱}{s+۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۳ & ۰/۵ \end{bmatrix}$$



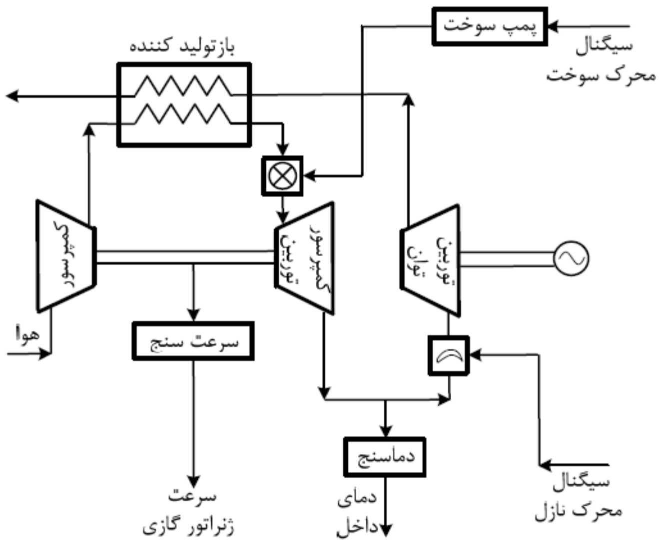


- مراحل طراحی سیستم های کنترل چندمتغیره:

  - طراحی پیش جبران ساز برای غلبه قطری سازی
  - طراحی کنترل کننده های SISO برای تک حلقه ها

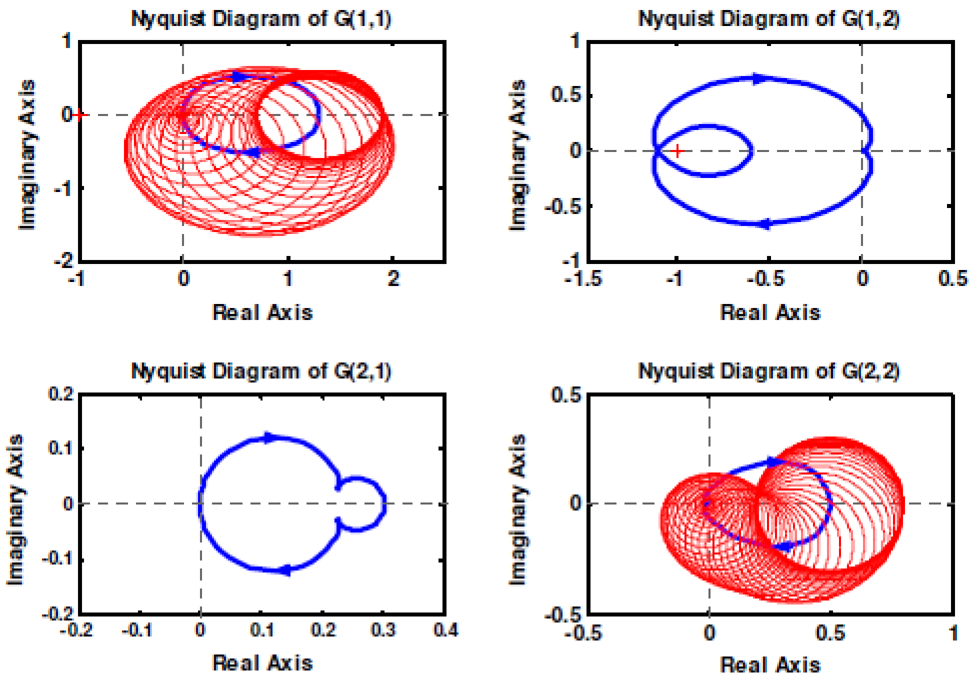
- نکته مهم: انتخاب پیش جبران ساز برای غلبه قطری سازی

- مثال ۷-۱۵



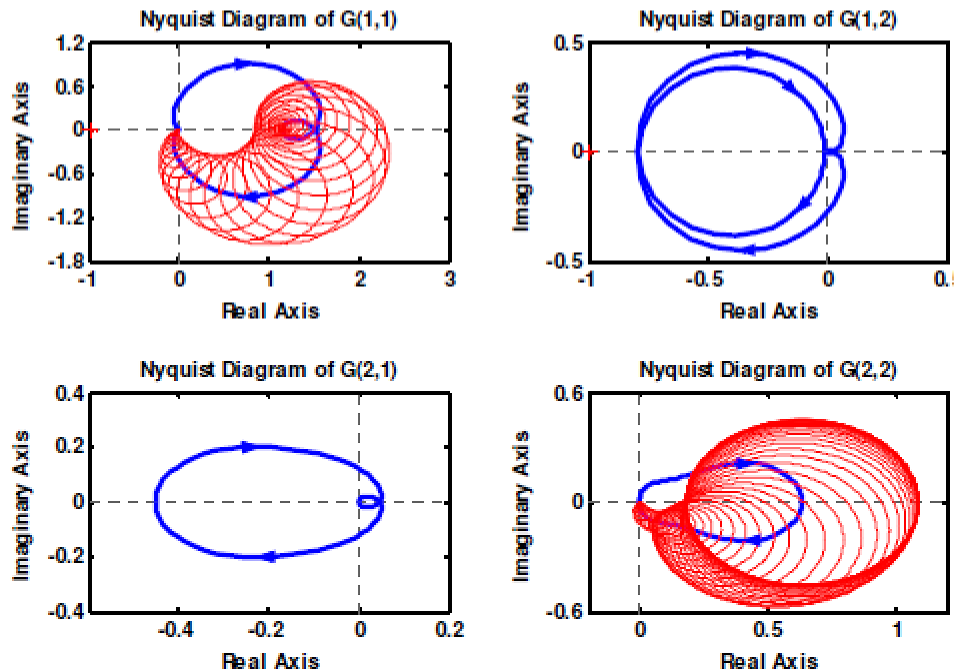
$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{0/806s + 0/264}{s^2 + 1/15s + 0/202} & \dfrac{-(15s + 1/42)}{s^3 + 12/8s^2 + 13/6s + 2/36} \\ \dfrac{1/95s^2 + 2/12s + 0/49}{s^3 + 9/15s^2 + 9/39s + 1/62} & \dfrac{7/14s^2 + 25/8s + 9/35}{s^4 + 20/8s^3 + 116/4s^2 + 111/6s + 18/8} \end{bmatrix}$$

- آرایه نایکوئیست سیستم حلقه باز



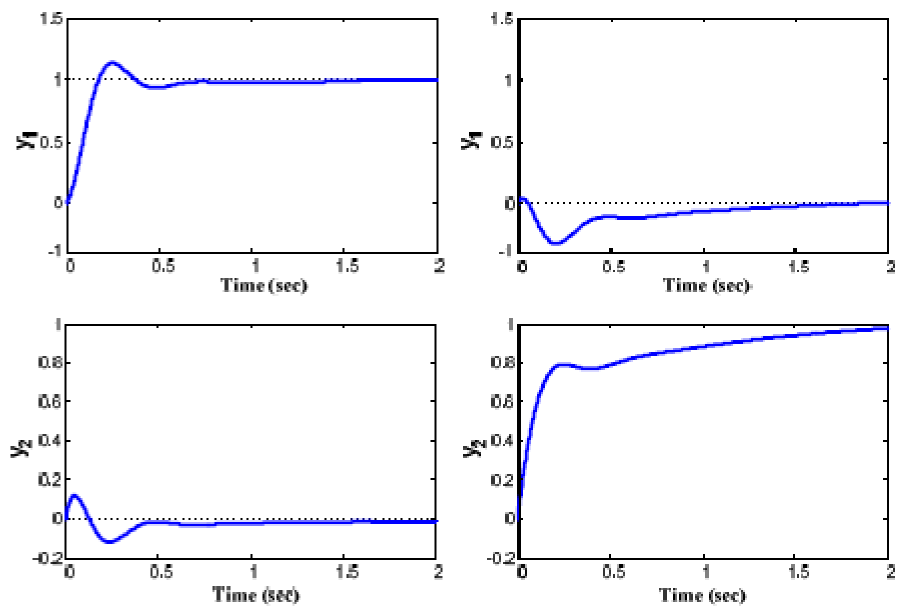
- پیش جبران سازی و آرایه نایکوئیست سیستم جبران شده

$$C_{\mathrm{p}}(s) = \begin{bmatrix} ۰/۳۶۱ & ۰/۴۵ \\ -۱/۱۳ & ۱ \end{bmatrix} \longrightarrow$$



- پاسخ سیستم حلقه بسته

$$K(s) = \begin{bmatrix} ۸ & ۰ \\ ۰ & ۱۰ \end{bmatrix} + \frac{۱}{s}\begin{bmatrix} ۸ & ۰ \\ ۰ & ۱۰ \end{bmatrix} \longrightarrow$$



(ب) (الف)

نتیجه گیری

- سیستم‌های واقعی صنعتی چندین حلقه کنترلی دارند.
- مساله انتخاب ساختار کنترلی: مجموعه ورودی‌ها-خروجی‌ها و پیکربندی کنترلی برای اجرای مناسب کنترل چندمتغیره ضروری است.
- آرایه بهره نسبی ابزاری کاربردی در پیکربندی کنترل است.
- مفاهیم مختلف کنترل پذیری انتگرالی و تمامیت در *سیستم‌های صنعتی* بسیار *مهم* هستند.
- *حلقه* بستن ترتیبی یک راهکار عملیاتی در طراحی سیستم‌های کنترل چندمتغیره برای فرآیندهای صنعتی است.
- طراحی پیش جبران سازها برای حل مساله دشواری کنترل.

- مفهوم غلبه قطری برای سیستم‌های کنترل چندمتغیره.
- طراحی سیستم‌های کنترلی چندمتغیره متمرکز با پیش جبران سازهایی غلبه قطری ساز.