کنترل PI سیستم های چندمتغیره

علی خاکی صدیق

گروه کنترل- دی ۱۳۹۸

- **مقدمه**

  - کنترل‌کننده‌های PID هنوز هم تقریباً حرف اول را در کاربردهای صنعتی می زنند
  - چند صد مقاله در زمینه PIDهای چندمتغیره یا چندحلقه ای

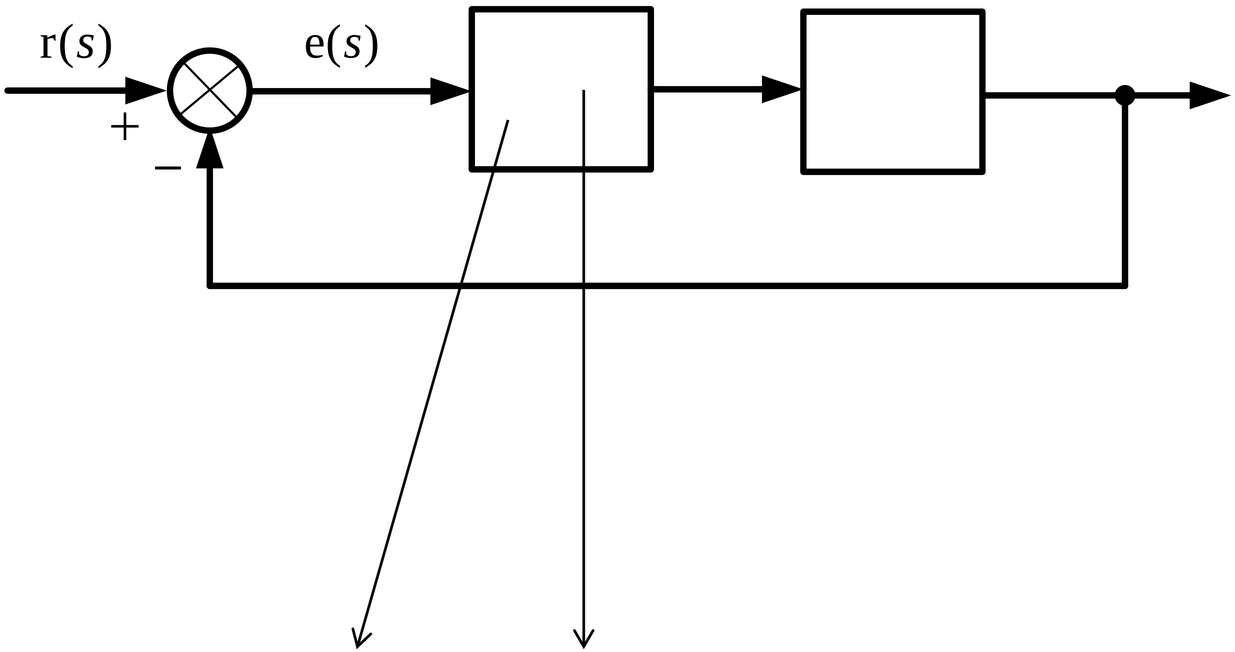
- کنترل کننده های PID علاوه بر سادگی، هزینه پائین، کارآیی و راحتی تعمیر و نگهداری، از مقاومت نسبتاً خوبی در مواجه با نامعینی برخوردارند
- عمل تناسبی (P) خروجی کنترل کننده را مطابق اندازه خطا تنظیم می کند
- عمل انتگرالی (I) خطای حالت ماندگار را حذف می کند
- عمل مشتقی (D) نوعی پیش بینی را وارد کنترل می کند

- کنترل کننده های PID چندمتغیره: نادیده گرفتن تداخل، و طراحی SISO PID برای هر کدام از حلقه ها. سیستم حلقه بسته لزوماً عملکرد و کارآیی مناسبی نخواهند داشت، حتی ممکن است که سیستم حلقه بسته ناپایدار نیز گردد. کیفیت عملکرد کنترل کننده های PID تک حلقه ای یا غیر متمرکز به میزان تداخل و پیچیدگی سیستم چندمتغیره ارتباط مستقیم دارد. **یا** سیستم های کنترل PID چندمتغیره با در نظر گرفتن تداخل و اثرات آن در طراحی و تنظیم. این کنترل کننده ها متمرکز هستند و با طراحی درست می توانند سیستم های با تداخل شدید را نیز به خوبی کنترل کنند.

مطلوب است که کنترل PID چندمتغیره با داشتن حداقل اطلاعات از سیستم و فرضیات لازم، چنان طراحی گردد تا مشخصه های زیر برآورده شوند:

- سیستم حلقه بسته پایدار باشد.
- تداخل کم ترین تاثیر را در پاسخ های حلقه بسته داشته باشد.
- ورودی های مرجع ردیابی شوند.
- حذف اغتشاش صورت گیرد.

- سیستم حلقه بسته:



این ماتریس ها چه باشند تا مشخصه های حلقه بسته برآورده گردند؟

- سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathrm{A}\mathbf{x}(t) + \mathrm{B}\mathbf{u}(t) + \mathrm{D}\mathbf{d}(t) \qquad (۸-۲-۱)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathrm{C}\mathbf{x}(t) \qquad (۸-۲-۲)$$

که در آن بردار حالت $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$، بردار ورودی $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$، بردار خروجی $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^l$ و بردار اغتشاش ثابت غیر قابل اندازه‌گیری $\mathbf{d}(t) \in \mathbb{R}^p$ است. ماتریس‌های A، B، C و D ماتریس‌های ثابت با ابعاد مناسب فرض می‌شوند. ماتریس تابع تبدیل متناظر سیستم داده شده با (۸-۲-۱) و (۸-۲-۲) عبارت است از

$$\mathrm{G}(s) = \mathrm{C}(s\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{B} \qquad (۸-۲-۳)$$

که یک ماتریس تابع تبدیل $l \times m$ بُعدیِ گویا است. فرضیات زیر را در رابطه‌ی با سیستم فوق در نظر بگیرید:

- فرضیات مساله:

  - سیستم حلقه باز پایدار
  - سیستم حلقه باز کنترل پذیر تابعی
  - سیستم حلقه باز کنترل پذیر انتگرالی
  - سیستم و مرتبه آن نامعلوم
  - تحریک مستقل ورودی ها و اندازه گیری خروجی ها امکان پذیر است
  - اغتشاش قابل اندازه گیری نیست

- معادله کنترل کننده:

$$u(s) = \left(K_1 + \frac{K_2}{s} \right) e(s)$$

- کنترل کننده P چندمتغیره
- کنترل کننده I چندمتغیره

- نکته مهم: طراحی کنترل کننده بر اساس اطلاعات از مدل فضای حالت یا ماتریس تابع تبدیل نباشد.

- طراحی بر اساس ماتریس اولین پارامتر مارکوف و ماتریس بهره حالت ماندگار سیستم چند متغیره

$$G(0) = -CA^{-1}B \qquad\qquad CB$$

- این ماتریس ها را از پاسخ پله سیستم چند متغیره به دست می آوریم

می‌توان فرض کرد که شرایط اولیه‌ی سیستم صفر است یا $\mathbf{x}(0) = 0$. هم‌چنین، آزمایشات روی سیستم واقعی هنگامی انجام می‌شود که اغتشاشی بر سیستم وارد نشود و لذا فرض می‌کنیم که $\mathbf{d}(t) = 0$ است از معادله‌های (۸-۲-۱) و (۸-۲-۲) داریم.

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathrm{C}\dot{\mathbf{x}} = \mathrm{CA}\mathbf{x} + \mathrm{CB}\mathbf{u} = \mathrm{CB}\mathbf{u} \qquad \text{در } t = 0^{+} \qquad (۸\text{-}۲\text{-}۵)$$

اکنون بر اساس معادله (۸-۲-۵) می‌توانیم طرح آزمایش زیر را برای محاسبه‌ی CB ارائه کنیم:

گام ۱ : بردار ورودی سیستم را صفر کنید، $\mathbf{u}(t) \equiv 0$. هنگامی‌که سیستم در حالت ماندگار قرار گرفت ($\mathbf{y}(\infty) = 0$)، یک ورودی ثابت غیر صفر $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1$ به سیستم اعمال کنید. در این حالت، $\dot{\mathbf{y}}(0) = \dot{\mathbf{y}}_1 = \mathrm{CB}\mathbf{u}_1$. مقدار $\dot{\mathbf{y}}(0)$ را می‌توان از پاسخ پله‌ی متناظر (پاسخ پله‌ای که از اعمال ورودی پله در اولین ورودی حاصل شده است) به طور ترسیمی محاسبه کرد.

گام ۲: گام ۱ را با ورودی ثابت غیر صفر $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{u}_2$ که مستقل خطی از $\mathbf{u}_1$ است، تکرار کنید. در این صورت $\dot{\mathbf{y}}(0) = \dot{\mathbf{y}}_2 = \mathrm{CB}\mathbf{u}_2$.

گام m: گام ۱ را با ورودی ثابت غیر صفر $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{u}_m$ که مستقل خطی از $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m-1}$ است، تکرار کنید. در این صورت $\dot{\mathbf{y}}(0) = \dot{\mathbf{y}}_m = \mathrm{CB}\mathbf{u}_m$.

با انجام m آزمایش پله‌ی فوق و داده‌برداری مناسب، داریم

$$\mathrm{CB} = [\dot{\mathbf{y}}_1 \quad \dot{\mathbf{y}}_2 \quad \cdots \quad \dot{\mathbf{y}}_m][\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_m]^{-1}$$

- محاسبه ماتریس بهره حالت ماندگار سیستم چند متغیره از پاسخ پله:

گام ۱: بردار ورودی سیستم را صفر کنید، $\mathbf{u}(t) \equiv 0$. هنگامی‌که سیستم در حالت ماندگار قرار گرفت ($\mathbf{y}(\infty) = 0$)، یک ورودی ثابت غیر صفر $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1$ به سیستم اعمال کنید. خروجی سیستم را ثبت کنید و مقدار حالت ماندگار آن را تعیین کنید. داریم

$$\mathbf{y}_{1ss} = G(0)\mathbf{u}_1$$

که درآن $\mathbf{y}_{1ss} = \lim_{t\to\infty} \mathbf{y}(t)$ و $\mathbf{y}(t)$ بردار پاسخ پله به ورودی $\mathbf{u}_1$ است.

گام ۲: گام ۱ را با ورودی ثابت غیر صفر $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{u}_2$ که مستقل خطی از $\mathbf{u}_1$ است، تکرار کنید. در این حالت داریم

$$\mathbf{y}_{2ss} = G(0)\mathbf{u}_2$$

که درآن $\mathbf{y}_{2ss} = \lim_{t\to\infty} \mathbf{y}(\mathrm{t})$ و $\mathbf{y}(\mathrm{t})$ بردار پاسخ پله به ورودی $\mathbf{u}_2$ است.

گام m: گام ۱ را با ورودی ثابت غیر صفر $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{u}_m$ که مستقل خطی از $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m-1}$ است، تکرار کنید. در این حالت داریم

$$\mathbf{y}_{mss} = G(0)\mathbf{u}_m$$

که درآن $\mathbf{y}_{mss} = \lim_{t\to\infty} \mathbf{y}(\mathrm{t})$ و $\mathbf{y}(\mathrm{t})$ بردار پاسخ پله به ورودی $\mathbf{u}_m$ است.

با انجام m آزمایش پله‌ی فوق و داده‌برداری مناسب، داریم

$$G(0) = [\mathbf{y}_{1ss} \quad \mathbf{y}_{2ss} \quad \cdots \quad \mathbf{y}_{mss}][\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_m]^{-1} \qquad (۷-۲-۸)$$

- دو راهکار طراحی کنترل کننده های PI مقاوم چند متغیره:

- راهکار اول:

✓ کنترل کننده P.

از اعمال کنترل‌کننده‌ی P چندمتغیره به سیستم حلقه باز با فرض $\mathbf{d}(t) = 0$، داریم

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\mathrm{A} - \mathrm{BK}_1\mathrm{C}\right)\mathbf{x}(t) + \mathrm{BK}_1\mathbf{r}(t) \qquad (۸-۲-۸)$$

با فرض شرایط اولیه‌ی صفر داریم

$$\mathbf{x}(t) = e^{\left(\mathrm{A}-\mathrm{BK}_1\mathrm{C}\right)t}\int_0^t e^{-\left(\mathrm{A}-\mathrm{BK}_1\mathrm{C}\right)\tau}\,\mathrm{BK}_1\mathbf{r}(\tau)d\tau$$

با استفاده از رابطه‌ی زیر که برای هر ماتریس ناویژه‌ی M درست است

$$\int_{۰}^{t} e^{M\tau}\, d\tau = [e^{\mathrm{M}t} - \mathrm{I}]\mathrm{M}^{-۱}$$

و با فرض ثابت بودن $\mathbf{r}(t)$ داریم

$$\mathbf{x}(t) = -\left(\mathrm{A} - \mathrm{BK}_{۱}\mathrm{C}\right)^{-۱} \mathrm{BK}_{۱}\mathbf{r} + e^{\left(\mathrm{A}-\mathrm{BK}_{۱}\mathrm{C}\right)t} \left(\mathrm{A} - \mathrm{BK}_{۱}\mathrm{C}\right)^{-۱} \mathrm{BK}_{۱}\mathbf{r}$$

و جایگزینی این معادله در (۸-۲-۲) می‌دهد

$$\mathbf{y}(t) = -\mathrm{C}\left(\mathrm{A} - \mathrm{BK}_{۱}\mathrm{C}\right)^{-۱} \mathrm{BK}_{۱}\mathbf{r} + \mathrm{C}e^{\left(\mathrm{A}-\mathrm{BK}_{۱}\mathrm{C}\right)t} \left(\mathrm{A} - \mathrm{BK}_{۱}\mathrm{C}\right)^{-۱} \mathrm{BK}_{۱}\mathbf{r}$$

بسط سری تیلور عبارت نمایی در معادله‌ی بالا می‌دهد

$$\mathbf{y}(t) = \mathrm{CBK}_{۱}\mathbf{r}t + \mathrm{C}\left[\sum_{k=۲}^{\infty} \left(\mathrm{A} - \mathrm{BK}_{۱}\mathrm{C}\right)^{k} \frac{t^{k}}{k!}\right]\mathrm{BK}_{۱}\mathbf{r} \qquad (۸\text{-}۲\text{-}۹)$$

برای زمان‌های آغاز پاسخ $t \approx ۰$ داریم

$$\mathbf{y}(t) = \mathrm{CBK}_{۱}\mathbf{r}t \qquad (۸\text{-}۲\text{-}۱۰)$$

اکنون ماتریس K_1 را به صورت زیر انتخاب کنیم

$$K_1 = (CB)^+ \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_m \end{bmatrix} \qquad (۱۱-۲-۸)$$

که در آن $(CB)^+$ معکوس چپ ماتریس غیرمربعی CB است و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(CB)^+ = B^T C^T \left(CBB^T C^T\right)^{-1} \qquad (۱۲-۲-۸)$$

- سیستم های چندمتغیره منظم و نامنظم
- تحلیل پایداری حلقه بسته

✓ کنترل کننده مقاوم I

کنترل‌کننده‌ی مقاوم I. اگر از کنترل‌کننده‌ی $\mathbf{u}(t) = \varepsilon \mathrm{K}_۲ \int_۰^\infty \mathbf{e}(t)dt$ استفاده کنیم که در آن ε یک پارامتر مثبت تنظیم است، با تعریف $\mathbf{z}(t) = \int_۰^\infty \mathbf{e}(t)dt$، معادله حلقه بسته‌ی سیستم به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \varepsilon \mathrm{BK}_۲ \\ -\mathrm{C} & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ \mathrm{I} \end{bmatrix} \mathbf{r}(t) + \begin{bmatrix} \mathrm{D} \\ ۰ \end{bmatrix} \mathbf{d}(t) \qquad (۱۳\text{-}۲\text{-}۸)$$

که در صورت پایدار بودن ماتریس حلقه بسته در (۸-۲-۱۳)، داریم

$$\lim_{t\to\infty} \dot{\mathbf{z}}(t) = \lim_{t\to\infty} \mathbf{e}(t) = ۰$$

که ردیابی سیگنال‌های مرجع را در حضور اغتشاش تضمین می‌کند. در [4] نشان داده شده است که اگر کنترل‌کننده را به صورت زیر انتخاب کنیم

$$\mathrm{K}_۲ = \mathrm{G}^+(۰) \qquad (۱۴\text{-}۲\text{-}۸)$$

که در آن $\mathrm{G}(۰) = -\mathrm{CA}^{-۱}\mathrm{B}$ ماتریس بهره‌ی حالت ماندگار سیستم حلقه باز است، یک ε^* وجود دارد که برای تمام $۰ < \varepsilon < \varepsilon^*$ سیستم حلقه بسته پایدار است. توجه کنید که در صورتی‌که سیستم مربعی باشد $\mathrm{K}_۲ = \mathrm{G}^{-۱}(۰)$ است و با داشتن فرضیات مطرح شده در بخش ۸-۲-۱، $\mathrm{G}^{-۱}(۰)$ همواره وجود دارد.

✓ کنترل‌کننده‌ی مقاوم PI

با ترکیب دو کنترل‌کننده‌ی ارائه شده کنترل‌کننده‌ی مقاوم PI بدون نیاز به دانستن معادلات سیستم طراحی می شود:

$\mathrm{G}(\mathbf{0})$ $\qquad\qquad$ CB

مثال

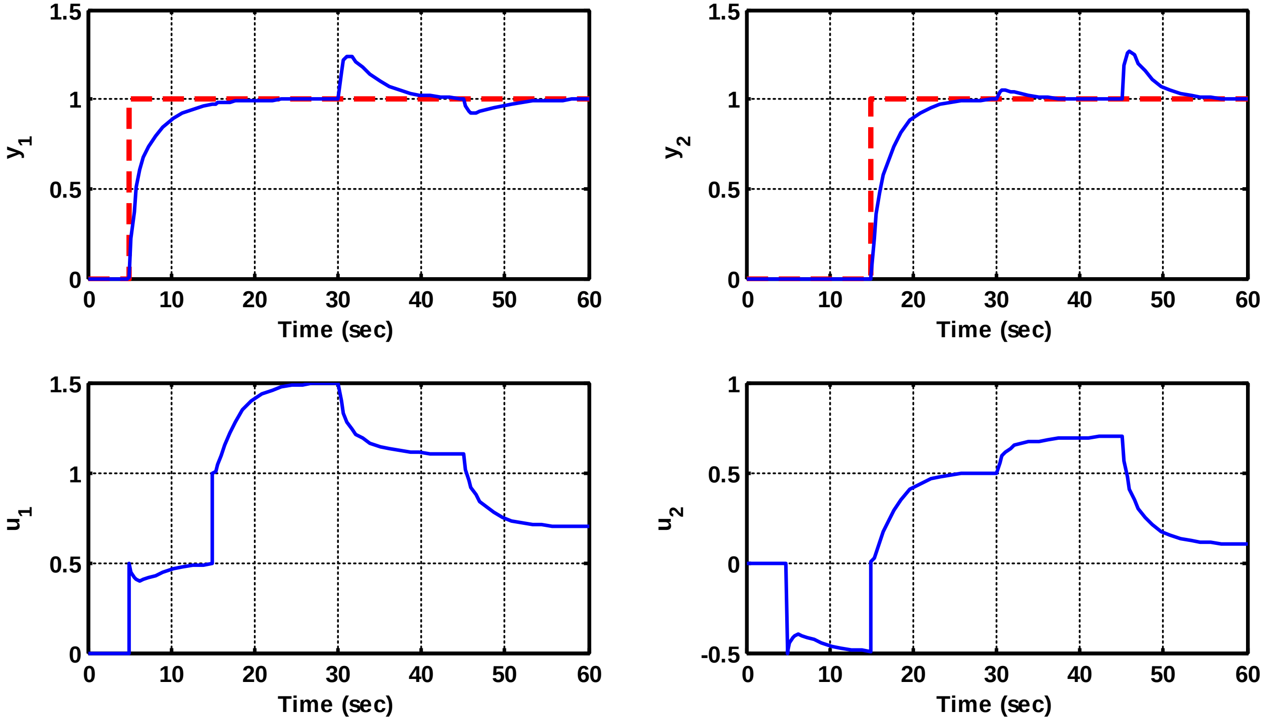
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۵ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\mathbf{d}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

$$CB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad G(\circ) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \circ/5 & \circ/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \circ/5 & \circ/5 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_1 & \circ \\ \circ & k_2 \end{bmatrix} \qquad \varepsilon K_2 = \varepsilon \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \circ/5 & \circ/5 \end{bmatrix}^{-1}$$

پاسخ های حلقه بسته:



راهکار دوم طراحی:

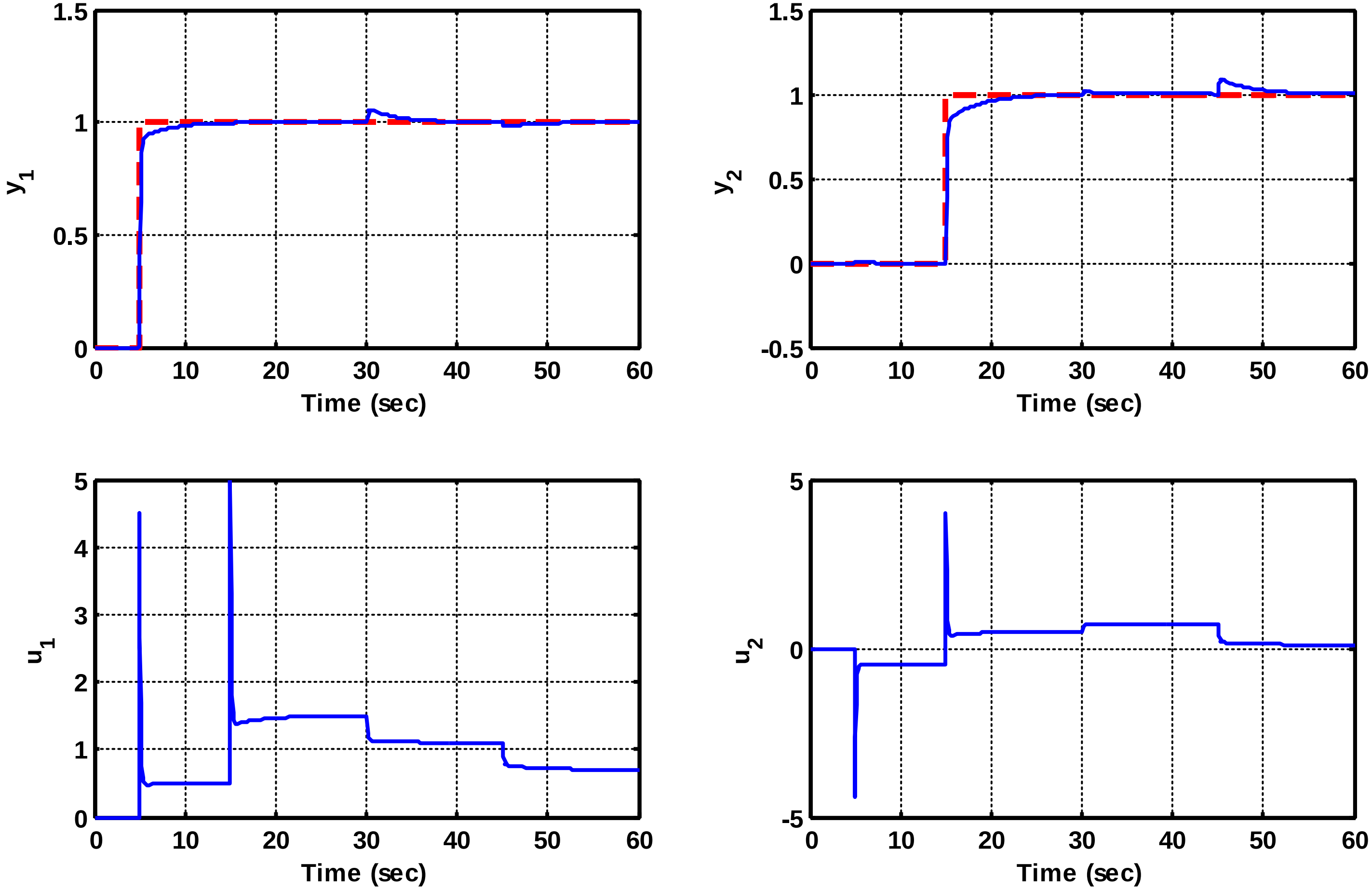
$$\mathbf{u}(t) = \alpha\varepsilon \mathrm{K}\mathbf{e}(t) + \varepsilon \mathrm{K}\mathbf{z}(t)$$

$$\phi_c(s) = |D(s)||sI_l + \varepsilon(\alpha + 1)D^{-1}(s)N(s)K|$$

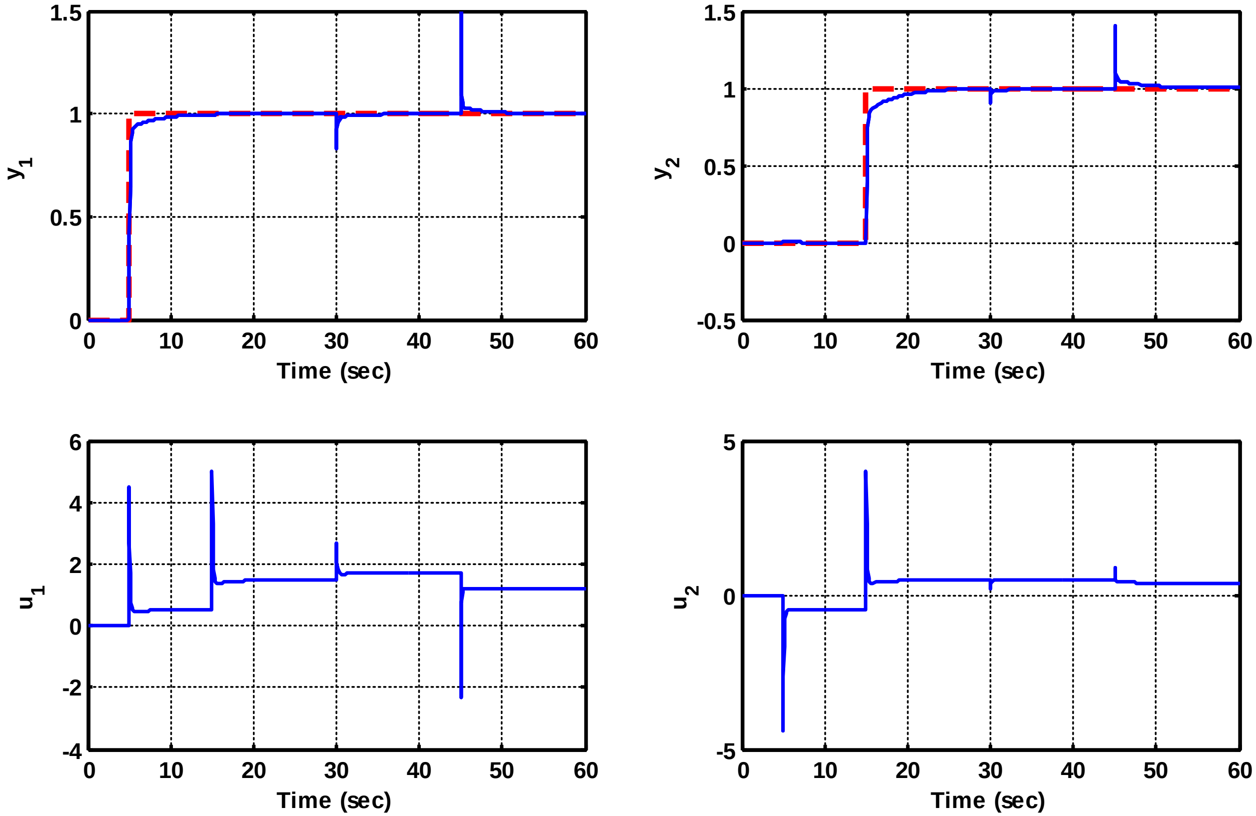
$$K = G^T\left(GG^T\right)^{-1}\Sigma$$

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 = \{s \in \mathbb{C}: |sI_n - A + o(\varepsilon)| = 0\} \\ z_2 = \{s \in \mathbb{C}: |sI_l + \varepsilon\Sigma + o(\varepsilon^2)| = 0\} \end{array}\right.$$

پاسخ های حلقه بسته به مثال قبل با کنترل کننده دوم:



بررسی مقاومت سیستم حلقه بسته:



✓ کنترل‌کننده‌های PI چندمتغیره‌ی بهره بالا

در بخش ۸-۲ روش‌های طراحی کنترل‌کننده‌ی PI چندمتغیره را ارائه کردیم که بر اساس ماتریس پاسخ پله‌ی واحد طراحی شدند. بخش عمده‌ی این راهکار بر اساس G(۰) بنا نهاده شده است. کاربرد اصلی این روش در فرآیندهای صنعتی است که پاسخ‌های چندان سریعی نیز ندارند. در این بخش کنترل‌کننده‌های PI چندمتغیره‌ی بهره بالا را ارائه می‌کنیم که به سیستم حلقه بسته‌ای با ویژگی منحصر به فرد تجزیه مجانبی به مودهای سریع[۱] و کند[۲] منجر می‌گردد. مودهای کند سیستم به طور مجانبی کنترل‌ناپذیر و رؤیت‌ناپذیر می‌شوند و لذا در رفتار ورودی و خروجی سیستم نقشی نخواهند داشت. از این‌رو، پاسخ سیستم حلقه بسته تنها از قطب‌های سریع متاثر بوده و لذا پاسخ سیستم بسیار سریع خواهد بود. کاربرد این طراحی بیش‌تر در سیستم‌هایی با عملکرد بالا[۳] خواهد بود و محدودیت‌های آن هم به‌طور طبیعی شدیدتر از سایر طراحی‌ها است. به عبارت دیگر، شرایط دشوارتری نسبت به طراحی‌های دو بخش گذشته باید برقرار باشد.

طراحی این کنترل‌کننده‌ها بر اولین پارامتر مارکوف سیستم چندمتغیره CB استوار است. در صورتی‌که سیستم منظم باشد کنترل‌کننده‌ی PI به بهترین عملکرد خود دسترسی پیدا می‌کند و در صورت نامنظم بودن آن، به یک فیدبک داخلی جهت اعمال کنترل‌کننده نیاز است. برای مطلب این بخش به [7] و مراجع داخل آن مراجعه کنید.

✓ طراحی برای سیستم های چندمتغیره منظم:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathrm{A}\mathbf{x}(t) + \mathrm{B}\mathbf{u}(t)$$

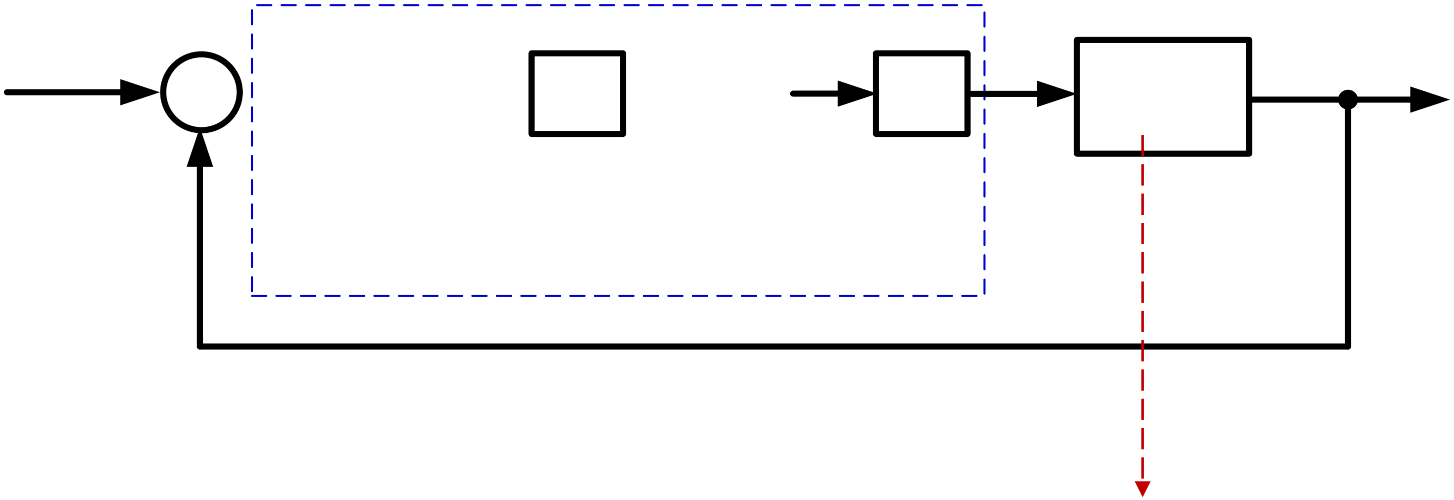
$$\mathbf{y}(t) = \mathrm{C}\mathbf{x}(t)$$

- نمایش فضای حالت و ماتریس تابع تبدیل داده شده می‌نیمال است.
- سیستم کنترل‌پذیر تابعی است.
- سیستم می‌نیمم‌فاز است و یا به عبارت دیگر، صفر انتقال نیمه راست صفحه ندارد.

کنترل کننده PI

$$\mathbf{u}(\mathrm{t}) = \mathrm{g}\{\mathrm{K}_1\mathbf{e}(\mathrm{t}) + \mathrm{K}_2\mathbf{z}(\mathrm{t})\}$$

سیستم حلقه بسته:



$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_{۱}(t)\\ \dot{\mathbf{x}}_{۲}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{A}_{۱۱} & \mathrm{A}_{۱۲}\\ \mathrm{A}_{۲۱} & \mathrm{A}_{۲۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{۱}(t)\\ \mathbf{x}_{۲}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰\\ \mathrm{B}_{۲}\end{bmatrix}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{C}_{۱} & \mathrm{C}_{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{۱}(t)\\ \mathbf{x}_{۲}(t)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \hdashline \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & -C_1 & -C_2 \\ 0 & A_{11} & A_{12} \\ \hdashline gB_2K_2 & A_{21} - gB_2K_1C_1 & A_{22} - gB_2K_1C_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{x}_1(t) \\ \hdashline \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_l \\ 0 \\ \hdashline gB_2K_1 \end{bmatrix} \mathbf{r}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & C_1 & C_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

- یک پرسش مهم: چگونه سیستم حلقه بسته را تحلیل کنیم؟

بدیهی است که پایداری و رفتار حلقه بستهٔ سیستم به انتخاب ماتریس‌های K_1، K_2 و اسکالر g بستگی دارد

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 & \bar{A}_4 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{r}(t) = \bar{A}\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{B}\mathbf{r}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) = \bar{C}\bar{\mathbf{x}}(t)$$

- قطری بلوکی سازی معادلات حالت به صورت کلی:

$$T^{-1}\bar{A}T = \begin{bmatrix} I_1 - ML & -M \\ L & I_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 & \bar{A}_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 & M \\ -L & I_2 - LM \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_s & A_x \\ A_y & A_f \end{bmatrix}$$

$$A_s = \bar{A}_1 - ML\bar{A}_1 - M\bar{A}_3 - \bar{A}_2L + ML\bar{A}_2L + M\bar{A}_4L$$

$$A_f = L\bar{A}_1M + \bar{A}_3M + L\bar{A}_2 + \bar{A}_4 - L\bar{A}_2LM - \bar{A}_4LM$$

$$A_y = L\bar{A}_1 + \bar{A}_3 - L\bar{A}_2L - \bar{A}_4L$$

$$A_x = \bar{A}_1M - ML\bar{A}_1M - M\bar{A}_3M + \bar{A}_2 - ML\bar{A}_2 - M\bar{A}_4 - \bar{A}_2LM + ML\bar{A}_2LM + M\bar{A}_4LM$$

$$A_x = A_y = 0$$

$$A_s = \bar{A}_1 - \bar{A}_2L$$

$$A_f = L\bar{A}_2 + \bar{A}_4$$

- چگونه ماتریس L, M را تعیین می کنیم؟

- با حل دو معادله نوع ریکاتی و در نظر گرفتن ساختار کلی زیر ماتریس ها به دست می آیند:

$$L = L_{\circ} + g^{-1}L_1 + g^{-2}L_2 + \cdots$$

$$M = M_{\circ} + g^{-1}M_1 + g^{-2}M_2 + \cdots$$

- با فرض های زیر داریم:

$$A_y = \circ \qquad g \to \infty$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{L = L_{\circ} = [-C_2^{-1}K_1^{-1}K_2 \qquad C_2^{-1}C_1]}$$

$$A_x = A_y = \circ \qquad g \to \infty \qquad \longrightarrow \quad \boxed{M = g^{-1}M_1 = \begin{bmatrix} g^{-1}K_1^{-1}B_2^{-1} \\ g^{-1}A_{12}C_2^{-1}K_1^{-1}B_2^{-1} \end{bmatrix}}$$

- اکنون با جایگذاری برای این ماتریس ها در معادلات حالت و خروجی حلقه بسته به دست می آوریم:

$$
\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_s \\ \dot{\mathbf{x}}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_1^{-1}K_2 & 0 & 0 \\ A_{12}C_2^{-1}K_1^{-1}K_2 & A_{11} - A_{12}C_2^{-1}C_1 & 0 \\ 0 & 0 & -gB_2K_1C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{x}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ A_{12}C_2^{-1} \\ gB_2K_1 \end{bmatrix} \mathbf{r}
$$

$$
\mathbf{y} = \begin{bmatrix} K_1^{-1}K_2 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{x}_f \end{bmatrix}
$$

- تحلیل معادلات حلقه بسته؟

- مجموعه قطب های حلقه بسته:

$$
\underbrace{\left|\lambda I_m + K_1^{-1}K_2\right|\left|\lambda I_{n-m} - (A_{11} - A_{12}C_2^{-1}C_1)\right|}_{\text{slow}} \times \underbrace{\left|\lambda I_m + gB_2K_1C_2\right|}_{\text{fast}} = 0
$$

قطب های کند: کنترل ناپذیر و رویت ناپذیر

قطب های سریع

- انتخاب ماتریس های کنترل:

$$\left|\lambda I_m + K_1^{-1}K_2\right| = 0$$

$$|\lambda I_m + gB_2K_1C_2| = \left|\lambda C_2^{-1}C_2 + gB_2K_1C_2\right| = |\lambda I_m + gC_2B_2K_1| = 0$$

$$K_2 = -\alpha K_1$$

$$K_1 = [C_2B_2]^{-1}\Sigma$$

- سیستم حلقه باز منظم باشد
- تابع تبدیل مجانبی حلقه بسته:

$$\Gamma(s) = \Gamma_s(s) + \Gamma_f(s) = [C_s \quad C_f]\begin{bmatrix} sI - A_s & 0 \\ 0 & sI - A_f \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} B_s \\ B_f \end{bmatrix} = \Gamma_f(s) = [\lambda I_m + gCBK_1]^{-1}gCBK_1$$
$$= [\lambda I_m + g\Sigma]^{-1}g\Sigma$$

- سیستم حلقه بسته پایدار و مقاوم با تداخل بسیار کم

- **مثال**

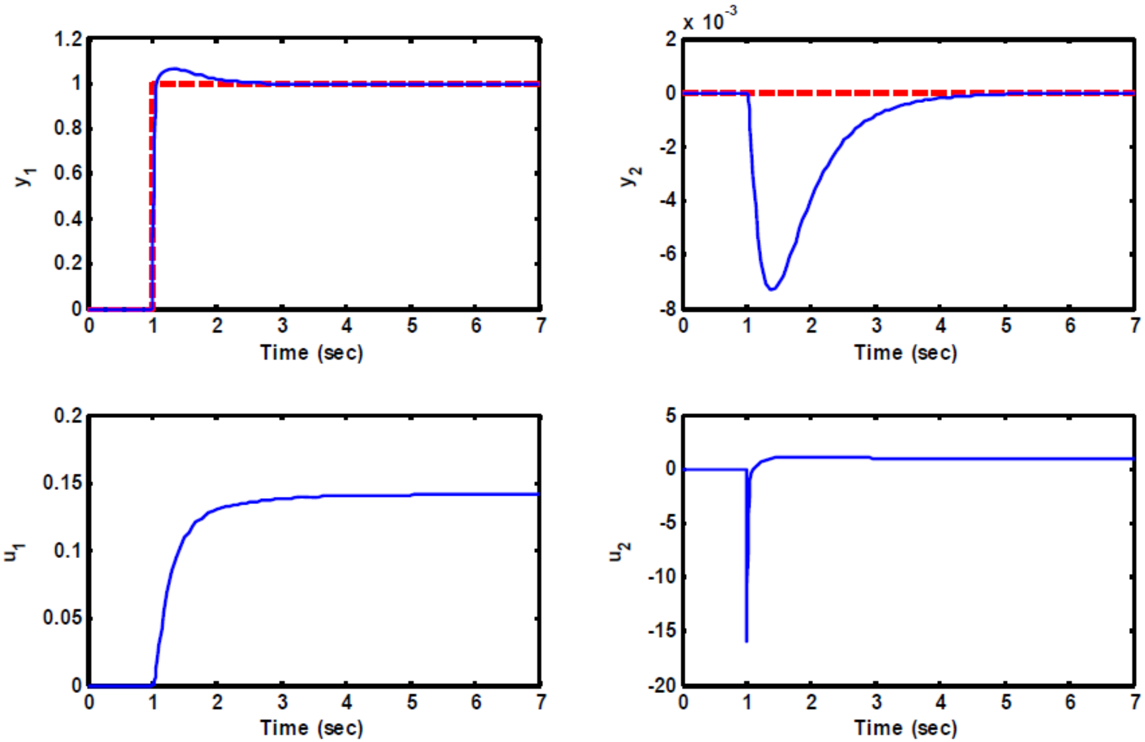
$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} ۱/۳۸ & -۰/۲۰۷۷ & ۶/۷۱۵ & -۵/۶۷۶ \\ -۰/۵۸۱۴ & -۴/۲۹ & ۰ & ۰/۶۷۵ \\ ۱/۰۶۷ & ۴/۲۷۳ & -۶/۶۵۴ & ۵/۸۹۳ \\ ۰/۰۴۸ & ۴/۲۷۳ & ۱/۳۴۳ & -۲/۱۰۴ \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۵/۶۷۹ & ۰ \\ ۱/۱۳۶ & -۳/۱۴۶ \\ ۱/۱۳۶ & ۰ \end{bmatrix}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

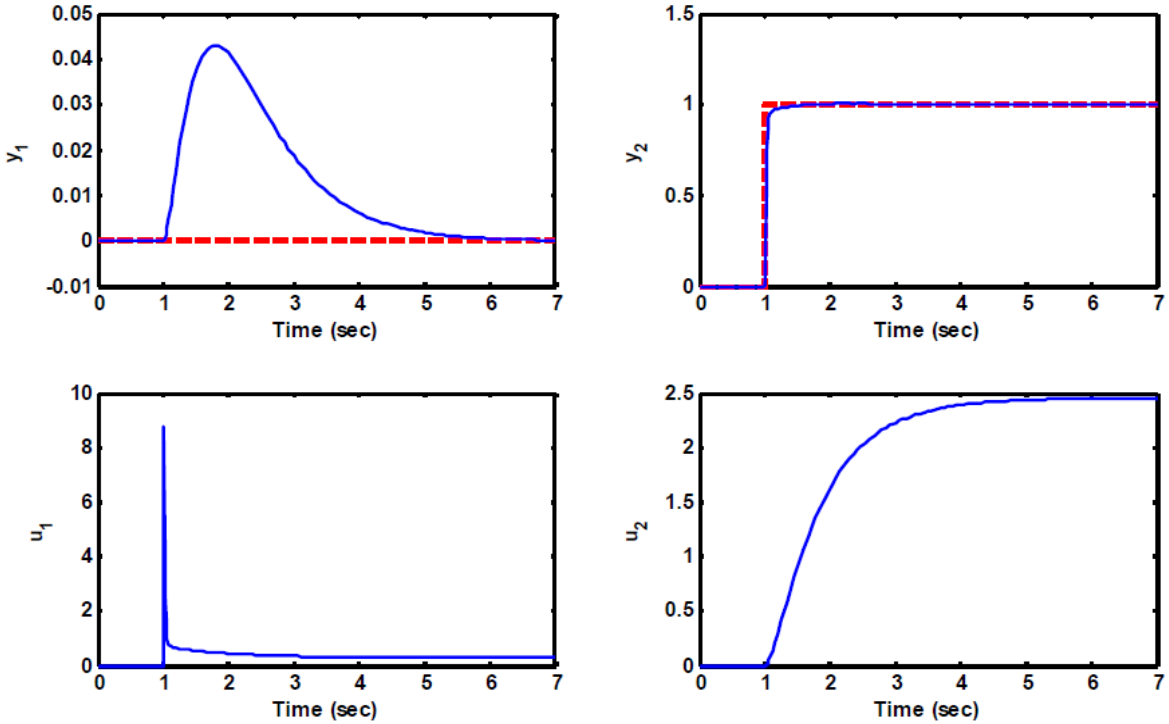
$$\sigma(A)=\left\{۰/۰۶۳۵۱ \text{ ، } ۱/۹۹۱ \text{ ، } -۵/۰۵۷ \text{ ، } -۸/۶۶۶\right\}$$

$$S_{۲}=\left\{-۱/۱۹۲ \text{ ، } -۵/۰۳۹\right\}$$

$$\mathrm{K}_{۱}=[\mathrm{CB}]^{-۱}\Sigma=\begin{bmatrix} ۰ & ۰/۱۷۶۱ \\ -۰/۳۱۷۹ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰/۱۷۶۱ \\ -۰/۳۱۷۹ & ۰ \end{bmatrix}$$

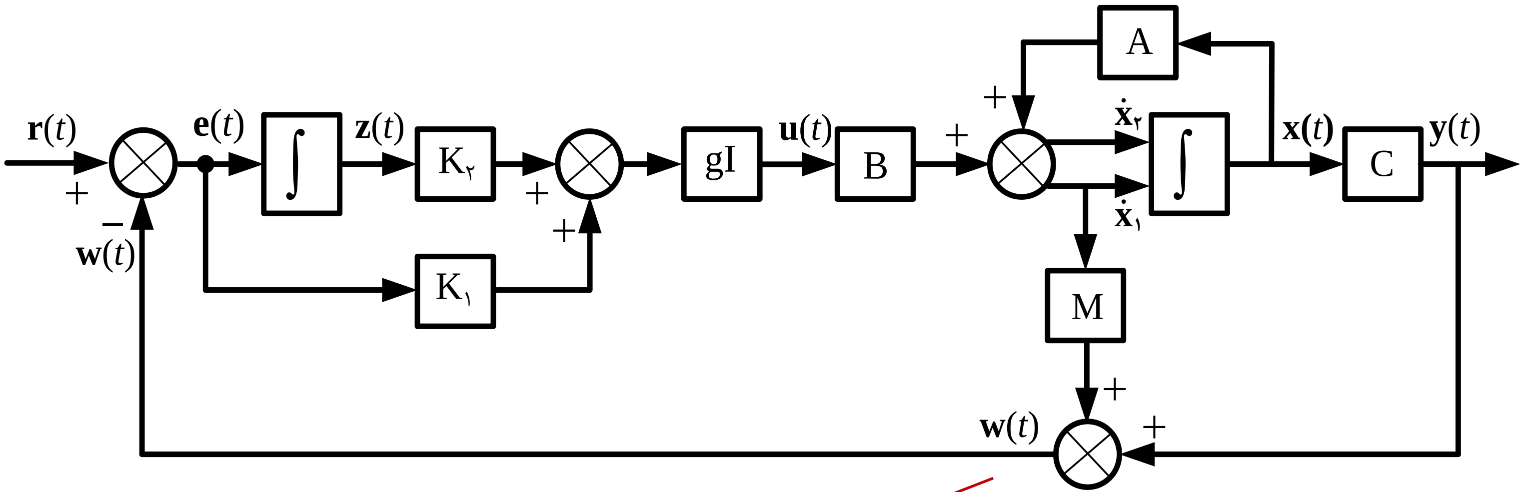


شکل ۸-۸ پاسخ سیستم حلقه بسته: خروجی‌ها و ورودی‌های کنترلی برای [۱ ۰]^T



شکل ۸-۹ پاسخ سیستم حلقه بسته: خروجی‌ها و ورودی‌های کنترلی برای $[0 \quad 1]^T$

طراحی برای سیستم‌های چندمتغیره‌ی نامنظم



$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{y}(t) + M\dot{\mathbf{x}}_1(t) \qquad \lim_{t\to\infty} \dot{\mathbf{x}}_1(t) = 0$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + M\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 + MA_{11} & C_2 + MA_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

- معادلات حلقه بسته:

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{z}}(t)\\ \dot{\mathbf{x}}_1(t)\\ \dot{\mathbf{x}}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\circ & -\mathrm{F}_1 & -\mathrm{F}_2\\ \circ & \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12}\\ \mathrm{gB}_2\mathrm{K}_2 & \mathrm{A}_{21}-\mathrm{gB}_2\mathrm{K}_1\mathrm{F}_1 & \mathrm{A}_{22}-\mathrm{gB}_2\mathrm{K}_1\mathrm{F}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{z}(t)\\ \mathbf{x}_1(t)\\ \mathbf{x}_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathrm{I}_l\\ \circ\\ \mathrm{gB}_2\mathrm{K}_1\end{bmatrix}\mathbf{r}(t)$$

$$\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}\circ & \mathrm{C}_1 & \mathrm{C}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{z}(t)\\ \mathbf{x}_1(t)\\ \mathbf{x}_2(t)\end{bmatrix}$$

- معادلات حلقه بسته پس از قطری سازی به روش قبل:

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_s\\ \dot{\mathbf{x}}_f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\mathrm{K}_1^{-1}\mathrm{K}_2 & \circ & \circ\\ \mathrm{A}_{12}\mathrm{F}_2^{-1}\mathrm{K}_1^{-1}\mathrm{K}_2 & \mathrm{A}_{11}-\mathrm{A}_{12}\mathrm{F}_2^{-1}\mathrm{F}_1 & \circ\\ \circ & \circ & -\mathrm{gB}_2\mathrm{K}_1\mathrm{F}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_s\\ \mathbf{x}_f\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\circ\\ \mathrm{A}_{12}\mathrm{F}_2^{-1}\\ \mathrm{gB}_2\mathrm{K}_1\end{bmatrix}\mathbf{r}$$

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}\mathrm{C}_2\mathrm{F}_2^{-1}\mathrm{K}_1^{-1}\mathrm{K}_2 & \mathrm{C}_1-\mathrm{C}_2\mathrm{F}_2^{-1}\mathrm{F}_1 & \mathrm{C}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_s\\ \mathbf{x}_f\end{bmatrix}$$

- قطب های حلقه بسته:

دسته‌ی اول قطب‌ها. این دسته‌ی کنترل‌ناپذیر از قطب‌های کند با معادله‌ی زیر داده می‌شوند

$$\left|\lambda I_m + K_1^{-1} K_2\right| = 0$$

که با انتخاب $K_2 = -\alpha K_1$ پایدار خواهند بود.

دسته‌ی دوم قطب‌ها. این دسته‌ی از قطب‌های کند با معادله‌ی زیر داده می‌شوند

$$\left|\lambda I_m - A_{11} + A_{12} F_2^{-1} F_1\right| = 0 \qquad (۸-۳-۴۴)$$

که بر خلاف قطب‌های داده شده با (۸-۳-۳۲)، به علت وجود فیدبک داخلی رؤیت‌پذیر هستند. باید توجه داشت که این قطب‌ها صفرهای جدید انتقال هستند که با تشکیل خروجی $\mathbf{w}(t)$ ایجاد شده‌اند. با توجه به رؤیت‌پذیری این قطب‌ها، در رفتار ورودی-خروجی سیستم تاثیر داشته و پاسخ را کند خواهند کرد.

دسته‌ی سوم قطب‌ها. این دسته از قطب‌ها که قطب‌های سریع سیستم هستند عبارت‌اند از

$$\left|\lambda I_m + g B_2 K_1 F_2\right| = 0$$

و معادل‌اند با

$$\left|\lambda I_m + g F_2 B_2 K_1\right| = 0 \qquad (۸-۳-۴۵)$$

این قطب‌ها کنترل‌پذیر و رؤیت‌پذیر هستند و با انتخاب K_1 به صورت

$$K_1 = (F_2B_2)^{-1}\Sigma$$

- تابع تبدیل مجانبی حلقه بسته:

$$\Gamma(s) = \Gamma_s(s) + \Gamma_f(s)$$
$$= [C_1 - C_2F_2^{-1}F_1][sI_{n-l} - A_{11} + A_{12}F_2^{-1}F_1]^{-1}A_{12}F_2^{-1}+C_2F_2^{-1}[sI_l + gF_2B_2K_1]^{-1}gF_2B_2K_1$$

نکته‌ی مهم در این طراحی، انتخاب ماتریس اندازه‌گیری **M** است. در واقع **M** را باید چنان انتخاب کرد که:

- F_2 رتبه کامل داشته و سیستم حلقه بسته پایدار باشد. به عبارت دیگر ریشه‌های معادله (۸-۳-۴۵) پایدار باشد.
- تداخل در سیستم کم‌ترین مقدار را داشته باشد.

- **مثال**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_۱ \\ \dot{x}_۲ \\ \dot{x}_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱/۲۱ & ۱ \\ ۰ & -۹/۳۹ & -۰/۹۶۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ -۰/۷۱۷ & -۰/۱۴۳ \\ ۱۱/۴۲ & -۷/۲۸۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_۱ \\ u_۲ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{CB} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ -۰/۷۱۷ & -۰/۱۴۳ \\ ۱۱/۴۲ & -۷/۲۸۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰/۷۱۷ & ۰/۱۴۳ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{M} = \begin{bmatrix} m_۱ \\ m_۲ \end{bmatrix}$$

و لذا

$$\mathrm{F}_۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_۱ \\ m_۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & m_۱ \\ -۱ & m_۲ \end{bmatrix}$$

$m_۱$ و $m_۲$ باید به گونه‌ای انتخاب شوند که $F_۲$ رتبه کامل داشته باشد. از این رو می‌توان $m_۲$ را برابر صفر انتخاب کرد. مقدار $m_۱$ صفر انتقال سیستم را تعیین می‌کند. صفرهای انتقال جدید به صورت زیر داده می‌شوند

$$\lambda + \frac{۱}{m_۱} = ۰$$

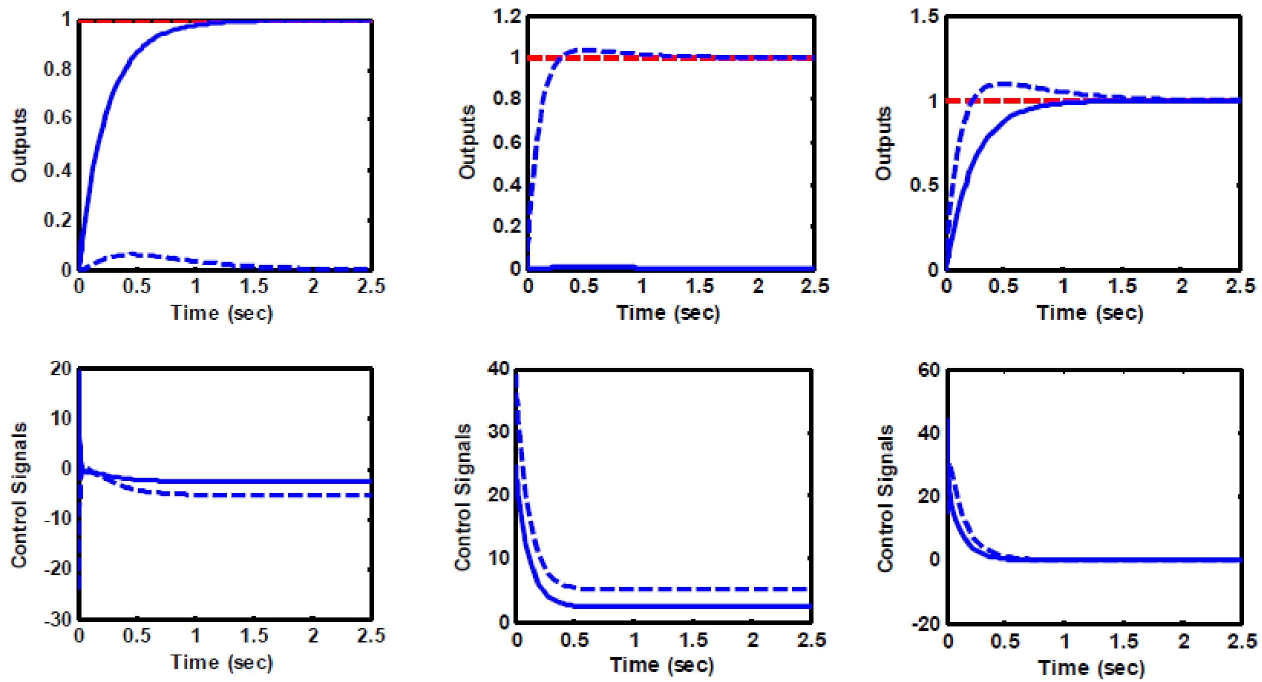
با انتخاب $m_۱ = ۰/۲۵$ داریم

$$F_۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۰/۲۵ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

و از معادله (۸-۳-۴۶) با انتخاب $\Sigma = \mathrm{diag}\,\{۱۰, ۱\}$، داریم

$$K_۱ = \begin{bmatrix} ۱/۹۵۷۳ & ۲/۴۹۲۸ \\ -۲/۴۲۷ & ۳/۹۵۷۸ \end{bmatrix}$$

و $K_۲ = ۲K_۱$. پاسخ‌های سیستم حلقه بسته برای $g = ۱۰$ در شکل ۸-۱۱ رسم شده است.



(ج) (ب) (الف)

شکل ۸-۱۱ پاسخ‌های سیستم حلقه بسته برای مثال ۸-۴، (الف) ورودی $[1 \quad 1]^T$، (ب) ورودی $[1 \quad 0]^T$ و (ج) ورودی $[0 \quad 1]^T$. $y_1(t)$ و $u_1(t)$ به صورت توپر و $y_2(t)$ و $u_2(t)$ به صورت خط‌چین نمایش داده شده‌اند.